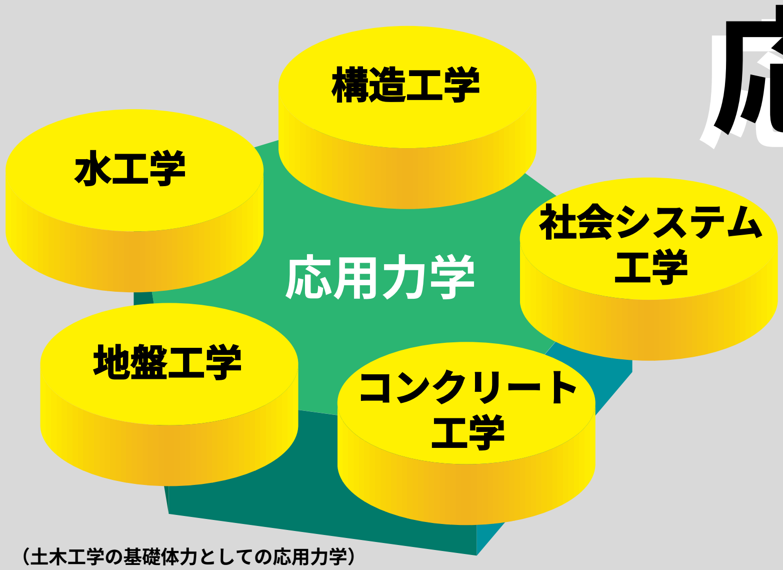
応用力学の深淵



（土木工学の基礎体力としての応用力学）

■企画趣旨

応用力学は土木工学の基礎体力の一つである．今，変革する社会を見据えながらさまざまな将来展望が語られているが，展望に共通していることは新領域の開拓である．開拓する分野の選択は重要であるが，それと同時に開拓を実現するための基礎体力の充実も軽視することはできない．一方，計算機の発展は応用力学に新たな展開を生み出した．従来解くことができなかった複雑な数理問題が解けるようになったのである．このため，解決できる工学的問題の範囲や程度が飛躍的に増加している．

今月号は応用力学を特集する．基礎体力としての応用力学を整理し，数値計算を利用した将来の応用の方向を探るものである．なお，特集では応用力学を広い意味で使っている．構造や水，土やコンクリートといった物を対象とするだけでなく，刻々と変動するダイナミックシステムである社会システムも対象とした．また，これを受けて金融工学に関わる応用数学の内容も含むこととした．本特集は過去・現在・未来の順に構成されている．過去では土木工学のさまざまな分野でなされた貢献，現在では応用力学のエッセンスの体系的な整理，そして未来では今後の発展の方向の実例を示す．

本特集を編集するにあたり応用力学委員会からは全面的な支持を得た．同委員会は土木のさまざまな分野を横断して活動しており，本特集の多岐多様にわたる記事はその活動を象徴している．この場を借りて御礼を申し上げる．

企画班（50音順）
金山洋一・小門　武・白木　渡・林　一朗・半田真一・東野光男
堀　宗朗★・渡辺弘行★★
特別委員　寺田賢二郎・西村直志
【★　主査　　★★　副主査】

1. 今，なぜ，応用力学か

土木工学のパラダイム転換と応用力学のすすめ

東原紘道 Hiromichi HIGASHIHARA
フェロー会員 工博
東京大学教授 地震研究所

“応用力学は小難しそうな上，何の役に立つのかわからない”という批判があるそうで，本特集は，この批判への一つの回答だそうです．

でも考えてください．グローバルな競争の世紀といわれるご時世です．難しいからこそ差もつけられるというものでしょう．そこで，序論を受け持つ私は，次の3つを主張しようと思います：

(1)“現代は土木工学のパラダイム転換の時機”（平成8年度土木学会長時代の松尾稔先生）であるが，応用力学はその転換の一つの軸となりうる．

(2)応用力学の範囲は広くて漠としているが，研究の進展には明瞭なトレンドがある．これを念頭におくと方向感覚ができる．

(3)それでもやっぱり応用力学は難しい．しかし幸いなことに，土木学会はそれを志す会員のためのコミュニティを提供している．これを利用すると，楽に研究の最前線をモニターすることができる．

パラダイムの転換期というのは，とどのつまり，社会の変化が急激になり，これまでの枠組みが溶け崩れつつあることに他なりません．これは既成の知識の短命化ということでもあり，私達が獲得した知識は，日々，どんどん時代遅れになってゆくのです．しかしこのような変革期だからこそ腰を落ち着けて，自分の学識を見直す，そのためのベースを獲得しておくことが必要です．

土木工学はもともと学際的です．高度成長時代ならともかく，これからの研究者や技術者は，学際的な知識や思考の力をもたなければやっていけません．例えば具体的な公共事業の企画や評価をする際には，法律，経済学，社会学等の専門家との論議の中で，自分の主張を組み立て，説得できなければなりません．これは“専門家の説明責任”であり，現在進行している情報公開の潮流の避けられない行き先です．

この場合，射程の長い説得能力を身につけなければなりませんが，工学者である以上，やはり数理的な能力は大切な拠り所になります．とは言っても話はそう簡単ではありません．自分の分野では相当に高度な数学を使っている場合でもそうです．せっかくの経験を能力に結びつける秘訣は，視野を拡大して勉強することです．土木工学者なら，応用力学が良い目安になります．

応用力学の広がり

応用力学という小宇宙は，今もどんどん広がっています．もともと“力”の概念は抽象的です．現象をモデル化するためのツールですから，これが拡張を重ねてきたのは驚くに足りません．現在では，力学や物理の現象以外に，生体や社会の現象にも適用されています．

設計論や計画論すら，応用力学の対象になります．それは，これらが意思決定のプロセスだからです．意思決定は，定量化でき合理的に扱える部分を含んでいて，これは最適化問題として研究することができます．さらに設計や計画は，たくさんの意思決定＝最適化行動が連なる系列として，最適制御として研究することができます．

もちろん，設計や計画は高度に知的な活動であり，すべてが数学的に処理できるわけではありません．例えば設計者の勘や好みを代替することはできません．しかし，設計の相当部分は，もっともっと自動化できます．事実，優れたデザイナーは自動化に熱心です．コストを下げるとともに，精力を高度な判断に集中して作品の価値を高められるよう，合理化投資は怠らないぞというわけです．

なぜ応用力学なのかーその普遍性

このように言ってきますと，“では何でも応用力学ですか”という疑問が出されそうです．私の答えは，“ある意味ではそうです．”

まず，領域が異なる多くの分野で，同型の法則が成立しているという事実があります．例えば逆2乗法則やSchrödinger型方程式はいろいろな現象を支配していることが知られています（ですから量子力学の解析結果は，ある種の海洋波動の解明に使えます）．

多くの自然現象は変分法で定式化されますが，計画論

の最適化理論も変分法の一つですから，変分法は学際的な原理と言えます．当然，変分法は応用力学の中でも古くて新しいテーマであり続けています．

さらに数学的につめると，非常に普遍的な概念に辿り着きます．例えば，すべての雑音現象の根元には白色雑音が潜んでいるし，すべての不安定な現象は，その現れ方は多様であるにかかわらず，分岐現象として，関数の特異点の問題に還元されます．

このように普遍的な問題は，領域横断的に知識を開拓し整理しておく必要があります．土木学会の応用力学委員会は，これを大きな使命として設けられました．当然のことながら，このコミュニティの活動は，非常に領域横断的で，メンバーの専門は多岐にわたっています．

最後に，動的な現象を支配する時間変化率を扱うのに，例えば2階導関数を慣性効果として考察を重ねてきた力学のノウハウが，いろいろなところで利用されているという事実があります．この意味では，“力学”の呼び名はあながち僭称（せんしょう）とも言えませんね．

実験研究のトレンド

自然科学の基礎は経験則であり，信頼できる実験結果が基本です．現在では，高い性能のセンサーが実用化され，従来とは比較にならない微小な信号が捉えられています．それでも外界のノイズは消去できませんから，問題は雑音に埋もれた信号の抽出になります．多数のセンサーのアレイによる観測記録に数学的な手練手管を駆使して微小なシグナルを濾し取る，熾烈なまでの雑音との闘いが現代の実験研究の姿です．

CTに代表されるトモグラフィは，生体や地球の内部の研究に使われています．X線や地震波を使い，計測された波形データを処理して，物質内部を“透視”します．推定対象がX線吸収量や地震波速度などのスカラー量であればその分布がイメージング(画像表示)されます．

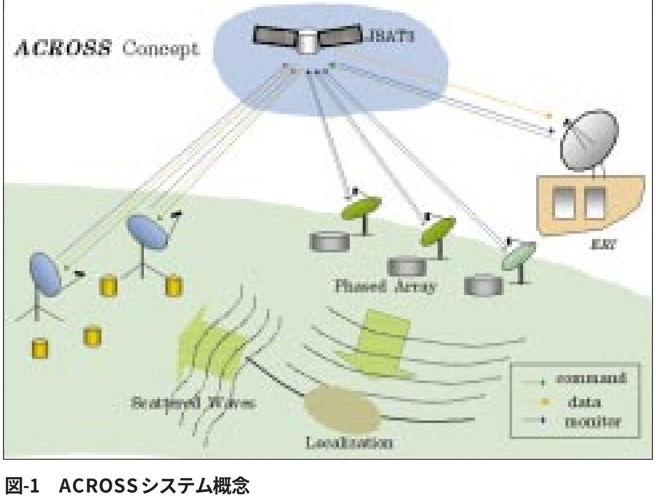


図-1　ACROSSシステム概念

もっと複雑な現象では，まず数学モデルを構築し，これを一種の数値フィルターとして利用して信号を抽出します．例えば地震動記録から震源のすべり破壊過程を推定できるのは，震源のせん断破壊運動を記述できるダブルカップルという数学モデルのお蔭です．

私たちは，地球物理学者と共同で，ACROSSシステム（図-1）なるものを開発中です．これは，周波数が精密に制御された一定の調和波動を発する人工震源のアレイによって波動を起こさせ，これを広帯域地震計のアレイで計測し地下の散乱構造を推定するものです．微弱な散乱信号を抽出するために，多数のデータの重ね合わせや震源の制御による波動の集束とともに，岩石実験で得た波動散乱の数学モデルをフィルターに利用します．

物騒な話ですが，未臨界核実験も，一部を物理実験してモデルを作り，これを数値実験に組み込むと説明されています．同じように，超高温高圧装置でマントル物質の小さな標本（装置の能力の制限が厳しいため）の構成則を同定し，これを素過程のモデルとして，数値実験で地球の地殻運動を解明することもされます．

土木工学が対象とする土，河川，交通などの現象は，メソスケールで，多くの要因が非線形に関与し，実験と計算が分離した従来の方法ではほとんど手に負えませんでした．これにはこの新しいアプローチが適していると考えられます．

計算力学という潮流

以上のような実験研究が可能になったのは，計算力学の発展に負うところが大です．計算力学によれば，これまで平均場とか平衡状態という限られたアプローチしかできなかった場の問題や多体の相互作用問題に踏み込み，非可逆過程や非平衡状態を直接“観察”することができます．物理的に検証できないため，きまって論争がおきますが，その威力は圧倒的です．

計算力学の法則やモデルは数学的に与えられます．しかし必ずしも方程式で記述できるとは限りません（原理的に方程式で記述できない問題は多くあります）．幸い，計算力学にとっては，解析的に書き下せなくても，計算の仕様さえ指定されればよく（例えば漸化式のように），これをアルゴリズムと呼びます．

アルゴリズムの構築は，与えられている式を数値計算するというイメージとはおよそ違った，高級な数学の世界です．そもそも解析的には求まらない解にアプローチするので，逐次近似－反復計算が基本になります．そこ

で，その近似の繰り返しが収束するのか？　収束したとしても収束先は真の解か？　という問題や解の存否，一意性といった数学的な問題が現れてきます．研究の最前線では，演算速度やメモリーはむしろ2次的な制約にすぎないことが多いのです．

そこは雪国，じゃなかった．逆解析の世界へ

定式化が済んでいる問題を解くことを順解析と呼びます．これは計算力学の骨格となる部分です．学生諸君が大学で習得させられるのはこの部分です．しかし，このトンネルを抜けると，高度な応用の地平線が開けます．そしてそこは逆解析の世界だった....

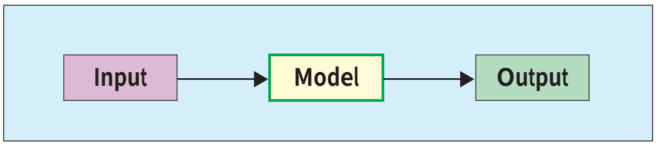


図-2　入力と出力を結ぶ解析の流れ

図-2を見てください．順問題では，（I＋M）が与えられており，そこからOを算出します．

しかしこれを一ひねりすれば，目標値（O＋M）から最適入力Iを決定する最適化，I/O関係からMを推定する同定，示方書等で指定された入力と応答限界（I＋O）からMの諸元を決定する設計，などの逆問題が生まれます．これらの重要性は一見して明らかでしょう．

逆解析は一般に抽象的で数学的な難問です．これは最初に述べたように応用力学が不評を買う大きな原因ですが，重要な問題を解く強力なツールであり，不評に気を遣って差し控えるわけにはいかないのです．

研究のロジスティックス－大学改造と学会

テーマ選択は，人の一生に関わる大事な問題です．その場合，分野の内容だけでなく，それを選んだ場合の研究環境を知り，研究方法をデザインすることが大切です．これを研究のロジスティックスと呼びます．日本の大学は研究のロジスティックスをきちんと教授してきていません．しかし，これから大事になります．そこで最後にコメントをしておきます．

応用力学では，たくさんの学問領域を横断した研究が進められていて，多様な研究成果がたえず生まれています．これを個人がフォローするのは不可能です．そこで学会です．応用力学委員会は，シンポジウムを開催し論文集を発行する他，分科会形式で日常的に研究者の交流の場を提供しています．このサービスを享受することは学会員の最も基本的な権利なのです．

多くのメンバーはコンピュータに長じており，インターネットでの情報交流を活発に進めています．インターネットにはいろいろな批判がありますが，研究者が価値ある情報を独り占めせず早期に公開し合う気風など注目すべき潮流が生まれています．応用力学委員会でも，オープンな仕組みを目指しています．

さて最近の独立行政法人の議論を通じて，良い評価システムを作れるかどうかが，日本の大学の改造が成功する鍵になることが明らかになりました．　評価の基本は，何と言っても同じ分野の研究者による評価です．先端研究の評価をいきなり部外者ができるわけはないからです．しかし，それならグローバルに通用するコミュニティを形成し，日常から自分たちの研究活動を発信し合いレビューし合っていれば困難は解消されます．学会がこの役目を担うべきことは明らかで，土木学会の委員会もまた国際的な通用力に向けた変身を求められているという結論で，落ちがついたようです．

材料と応用力学

小林昭一　Shoichi KOBAYASHI
フェロー会員　工博
福井工業大学教授　建設工学科土木工学専攻

はじめに材料があった

応用力学は，土木分野では社会基盤施設の特性を数理的に記述するための道具として発展してきた．それを活用して，設計のための基礎資料を得，使用中の状態を予測することができるようになった．もちろん，力学が数理的に記述されるようになる数千年も前から，施設は建設されていた．その主な材料は，身近に利用できる土で

あり，レンガであり，岩であり，木材であった．いずれも経験的にそれらの力学的な特性を活かして利用していた．エジプトのピラミッドや神殿遺跡，ギリシアの神殿やローマのパンテオンや水道遺跡などは優れた技術を用いて建設された巨大施設の例である．ローマ帝政時代以降は，材料的にも技術的にもほとんど見るべきものはなかったが，16世紀末になってバチカンのサン・ピエトロ大聖堂が完成した．しかし，この巨大ドームですら経験的力学の域を出なかった．

1670年頃にニュートンが力学や微積分法の基礎をつくり，17世紀末にはフックが弾性を表現し，ベルヌーイがはりの理論を提案した．この頃から力学は新しい時代に入った．1717年にベルヌーイが仮想仕事の原理を定式化し，1757年頃にオイラーは変分計算法を開発した．オイラーは「全宇宙は全知全能の創造主によって生み出されたものであるので，最大最小の性質で明らかにされないものはない」と考えていたようである．

鉄が量産されるようになると，その高い引張り強さを利用した施設が造られ始めた．鉄はまた補強にも使われた．サン・ピエトロ大聖堂のドームの基部にゆるみが生じていたのが発見され，18世紀の半ばに数理的な力学理論に基づいて鉄のリングで補強された．この成功は構造力学の問題を数理的に解決する方法の重要性を示すことになった．その方向に拍車をかけたのは，18世紀半ばに設立されたフランスの土木学校（Ecole de ponts et chausées）である．材料試験の結果を用いて，数理的手法により，構造や部材を設計するシステマチックな方法が広く認められるようになった．18世紀の力学の発展に最も大きく貢献したのはクーロンである．さらに，19世紀に入ると，ナビエ，少し遅れてコーシーである．いずれも土木学校の教授であった．

18世紀末になると錬鉄が製造され，改良されるにつれて，その特性を活かし，自重を軽くした新しい構造形式が現れた．トラス橋や吊橋である．フォース橋やブルックリン橋などはそれぞれの代表例である．エッフェル塔も記念碑的な鋼構造物である．斜張橋の原型も19世紀後半には現れている．

19世紀初頭には，ポルトランド・セメントも発明され，コンクリートが現れた．コンクリートは，最初は石材に代わるものとして利用されたが，次第に施工の容易さから種々の形態の施設に不可欠の材料として活用されるようになった．さらに，コンクリートの強い圧縮強さと鋼の高い引張り強さを組み合わせて利用した鉄筋コンクリートが発明されて，19世紀末には鉄筋コンクリート橋も造られた．また，同じ頃プレストレスト・コンクリートも現れている．

このように，新材料が開発されるとその長所を利用した新しい構造形式が出現し，さらに種々の材料の長所を組み合わせた複合的な利用形態が発明された．それにつれて，利用すべき材料の特性や組み合わせ方に関する深い力学的知識が必要となってきた．そのためには，正確に材料特性を把握し，明確に数理的表現を用いて記述することが必須となった．応用力学はこのような数理的表現の要求と共に発展してきた．

構成式を考えよう

応用力学の基本は，

i）対象に働く力とそのつり合い

ii）幾何学的な条件（連続性）

iii）対象を構成する材料の特性を数理的に記述すること

である．材料特性は，それを構成している個々の成分や，素材の結合状態などによって異なり，一般には，力，変形，時間，温度などの関数である．その関係を表現した式を構成式という．

力学を適用する際には，対象を数理的に設定することが必要である．そのために数理モデルを考える．モデルでは，

a）対象の形状（形態）

b）材料特性（構成式）

c）初期条件や境界条件

が検討される．構成式は，個々の材料について検討しなければならない．連続体モデルでは，微視的な構造特性を持つ材料を平均化して，あるいは等価な均質体とみなして，構成式を数理的に表現する．また，構成式は，時間に依存しないものと依存するものとに分けられる．前者には，連続体モデルのうち，例えば，負荷の経路によらず応力とひずみの関係が一価関数で表現される弾性や，負荷経路に依存して応力に対してひずみが多価となる塑性，あるいはそれらの結合した弾塑性がある．後者では，例えば，応力がひずみ速度の一価関数である粘性流体，粘性流体と弾性体の特性を併せ持つ粘弾性体や，粘性流体と塑性体との特性を併せ持つ粘塑性体などがある．さらに，構成式には，温度や応力の勾配とかひずみの勾配なども考慮されることもある．

構成式は，試験を通じてその妥当性や適用範囲が検証される．しかしながら，実際の試験法や試験結果と構成式との関係は簡単ではない．試験で計測されるのは力と変形である．通常は，これらから応力やひずみを算出し

ている．しかし，供試体内では試験の進行につれて，時々刻々内部の構造が変化しており，亀裂の発生や進展，負荷経路に伴う異方性の変化なども考えられる．さらに，時間や温度にも依存する過程（例えば，劣化や焼入れなど）も考えられる．すべての材料は試験中に何らかの非可逆的な変化を受ける．計測した結果にはこのような非可逆な変化が反映されているはずである．また，供試体内に生じる応力状態やひずみの分布も一般には一様でなく，場所によって変化率（勾配）も異なってくる．このような変化や非均一性をどのように取り扱えばよいのだろうか．簡単には答えられそうにもない．

一つの方法は，構成式に材料内部の変化を記述するパラメーター，内部変数を導入することである．もう一つの考え方は，構成式を，例えば，応力とかひずみレベル（階層）に応じて表現することである．内部構造の変化が著しい場合には，いろいろなレベルに対応したマルチレベルの構成式を考えることが必要になる．構成式は，簡単でありながらその本質を的確に表現することが望ましいし，仮定や条件の少ないことが望ましい．果たして上の方法は，負荷経路に依存する非可逆過程を十分表現できるであろうか．

また，新しい材料（超高強度材料，形状記憶材料，防振材料，インテリジェント・マテリアルや磁性流体など）の利用も検討されている．それらの構成式も重要である．

非破壊評価を推進しよう

材料や施設の健全性は実物の非破壊検査を通じて評価される．非破壊検査により，しばしば亀裂や損傷や材料の劣化が検出される．非破壊検査では，観測値から直接に，あるいは数理的な手法（逆解析法）を用いて欠陥の位置，形状や劣化の状態を推定することになる．材料が健全であることが施設の安全性を評価するための基礎である．しかし，構造の一部分が劣化したとしても，あるいは亀裂が発生したからといっても必ずしも施設が危険にさらされるわけではない．施設の健全性を評価するためには，損傷や劣化の経時的変化を把握し，力学的に判断することが必須である．施設の老化や劣化が社会問題ともなっている昨今，非破壊検査法や評価法の開発が急がれる．

計算材料科学に期待する

計算機の発達は計算材料科学という新分野を生み出した．一つは，分子や粒子のレベルから，材料の特性を計算によって推定しようという試みである．材料を分子や粒子の集合体と考えて，膨大な数の個々の粒子にニュートンの運動量の法則（力は運動量（質量×速度）の時間変化率に等しい）を適用する．このとき粒子相互間に作用する力は，距離の関数であるポテンシャルで表される．膨大な時間ステップ計算を要するけれども，材料内に生じるすべりや亀裂の進展などの局所的な変化がメゾスコピックなレベルで求められる．粒状体の挙動解析も類似のものであるが，粒子間の接触条件や粒子形状が複雑であるために取り扱いはより困難である．多結晶体や多孔質体の特性なども，例えば有限要素法を用いて，境界値問題として数値的に解くこともできる．その平均的な特性を求めることも容易である．また，構造変化の過程を追跡することもできる．さらに，系の運動エネルギーやポテンシャル・エネルギー，化学的エネルギーなどを含めた全エネルギーを最小にすることにより，例えば材料のミクロな構造を決定したり，物性を調べる試みもある．

もう一つは，材料の設計である．いろいろな特性を持つ素材からそれらの混合した，あるいはそれらが反応して示す新しい特性を予見し，望ましい特性を示す材料配合や製造条件などをシミュレートすることである．新材料開発への新しい手段として注目されている．

近い将来には，計算材料科学的な手法によってミクロなレベルで求めた結果をもとにマクロな材料特性を求め，さらにそれを構造解析や設計にまで活かす一貫した道が拓けるであろうし，また要求された特性を満足する材料を計算によって設計できるようになるであろう．将来の発展を期待したい．

参考文献

1－H.シュトラウブ（藤本一郎訳）：建設技術史，鹿島出版会，1976
2－S.P.チモシェンコ（川口昌宏訳）：材料力学史，鹿島出版会，1975

流れと応用力学

禰津家久 Iehisa NEZU
正会員　工博
京都大学教授　大学院工学研究科環境地球工学教室

水理学と流体力学

流体力学は固体力学の対語であり，連続体力学や応用力学の重要なジャンルである．流体を液体（水で代表）としたとき，水力学（Hydrodynamics）と呼ぶ．一方，水理学（Hydraulics）は古代ギリシア時代の静水力学や浮力原理などから経験的に発達するが，それが学問として注目されるのは16 世紀のルネッサンスからである．レオナルド・ダ・ヴィンチが初めて連続式の概念を示した．18 世紀になると，ダニエル・ベルヌーイと彼の盟友オイラーによってベルヌーイの定理および運動量保存則が提示され，粘性がゼロ（摩擦がゼロ）となる完全流体に関する力学大系が図られた．高校で習った「摩擦がゼロの質点系力学」に対応する[1)]．水理学演習で習うように，① 連続式，② ベルヌーイの定理（エネルギー式）および ③ 運動量式を連立させれば，流れのマクロな挙動を解くことができる（図-1 の積分法を参照）．これらの連立方程式は断面平均流速 $\bar{v}$ や圧力 $\bar{p}$ に関する代数式であり，簡単に解ける．18 世紀までは，水理学が流体力学そのものであり，水の力学をマクロに扱ったのである[1)]．

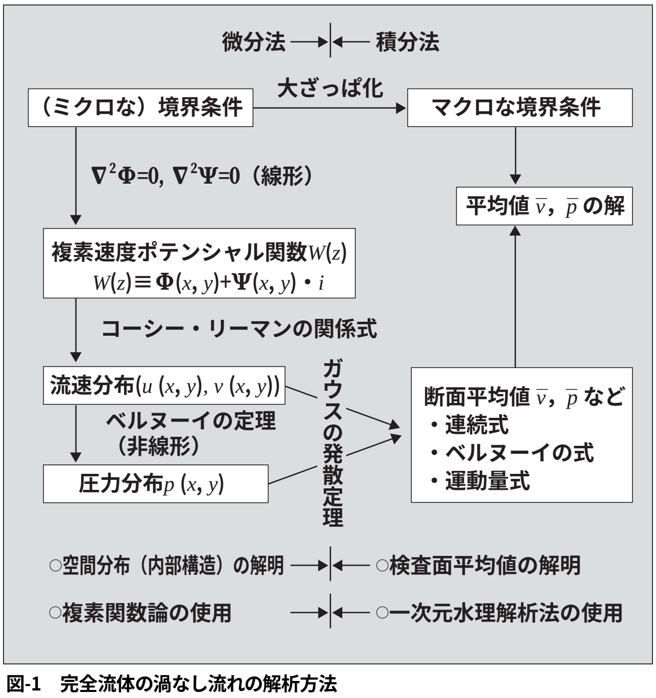


図-1　完全流体の渦なし流れの解析方法

完全流体とポテンシャル流理論

このように断面平均流速 $\bar{v}$ などは容易に解くことができるが，局所的な流速分布 $\boldsymbol{u}\equiv(u, v, w)$ はニュートンの第二法則から得られるオイラーの運動方程式（微分形）から境界条件を用いて解かねばならない．しかし，この方程式は強い非線形であり，その解は現在でも一般には得られない．方程式中の加速度項に対応する移流項が速度の 2 乗の次元であり，非線形となるためである．2 次元流れを対象にすると，連続式から流れ関数Ψが定義できる．Ψ＝一定の曲線が流線となり，この接線が流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ となる．一方，$\omega\equiv\nabla\times\boldsymbol{u}$ で定義される渦度がゼロのとき，流速は速度ポテンシャル関数Φを使って，$\boldsymbol{u}=\nabla\Phi$ で表現できる．連続式からΦが，また $\omega=0$ からΨが共にラプラス方程式を満足することが証明される．コーシー・リーマンの関係式から，複素速度ポテンシャル関数 $W(z)=\Phi+\Psi\cdot i$ が定義でき（ここで $z\equiv x+y\cdot i$），複素関数論を援用すれば，流速 $\boldsymbol{u}\equiv(u, v)$ を解くことができる（図-1 の微分法を参照）．これがポテンシャル流理論である[1)]．しかもうまいことに，渦なし流れ（$\omega=0$ のこと）では，オイラーの方程式から非定常流でも成立する拡張されたベルヌーイの定理が厳密に誘導され，これを使えば圧力分布 p も解ける．19 世紀まではこの理論が流体力学の中心であり，現場で役立つ実験水理学からは遊離した大学での学問すなわち応用力学・応用数学の 1 ジャンルとして華麗に発展した．

ポテンシャル流理論の応用とその破綻

現在では古典力学と呼ばれるポテンシャル流理論の最大の欠陥は，①流れの抵抗や摩擦損失を計算できない，いわゆる「ダランベールのパラドックス」が起こる．② 静止物体の表面で流速がゼロにならない，いわゆる「ノンスリップ条件」を満足しないことである．したがって，物体の表面から十分に離れた流れはポテンシャル流理論が近似的に適用できそうである．この代表例が，波動の水理学の基礎である微小振幅波理論である[1)]．いま，静止水面から例えば風によって水面波が発生したと考える．海底が十分深ければ，① や ② は波の挙動に関しては本質的な欠陥とならない．完全流体では渦度の保存則

が成立するから，静水状態（ω＝0）から波が発生しても渦度は保存され（ω＝0），したがってポテンシャル流理論が成立する．そこで，ラプラス方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ を解くことに帰着する．ラプラス方程式は線形である．では，流れの最も重要な非線形性はどこに行ったのか？それは，ベルヌーイの定理の速度水頭に現れる．水面での境界条件にベルヌーイの定理を使うが（力学的条件という），振幅が微小で速度水頭項が無視できると仮定し，線形の力学的条件を使ったものが微小振幅波理論である．この理論は実験値とよく一致する．しかし，海岸工学などで実際に問題となる波は有限振幅波で，非線形効果が無視できない場合が多い．

ナヴィエ・ストークス方程式と実用水理学

ポテンシャル流理論の破綻である①や②を解決するには，オイラーの方程式に粘性項を加える必要があり，19世紀中葉にナヴィエ・ストークス（N–S）方程式が提案された．しかし，N–S方程式を理論的に解くことは一般に困難で，N–S方程式から構成される流体力学が水理学・河川工学に与えた寄与はほとんどなかった．治水事業を行うには，エネルギー損失水頭 h_L や流れの抵抗則を評価することが不可欠で，先述のポテンシャル流理論ではなんらの解決も与えなかった．19世紀は経験水理学の黄金時代といわれ，多くの経験則・実用公式が現場サイドから提案された．管路のダルシー・ワイスバッハの式，開水路のマニング公式（1889）が代表例である．これらは，現在でも一次元水理学解析法の根幹をなし，水理学の教科書には必ず載っている[1]．このように，19世紀末では理論流体力学（古典力学）と実用水理学（実学）との溝はますます大きくなり，両者は無関係に発展していった．

境界層理論とその工学的適用

20世紀の開幕は，新しい物理学の誕生で始まった．プランクによる量子力学（1900），アインシュタインによる相対性理論（1905），それにプラントルによる境界層理論（1904）の誕生である．プラントルは，ポテンシャル流理論の欠陥である①と②を解決するために，物体のごく薄い層（境界層という）にはN–S方程式を適用し，境界層外ではポテンシャル流理論を適用して問題を解いた．この着想は何でもないようないわば「コロンブスの卵」と思う読者も多かろう．プラントルの弟子のブラジウスは級数展開法と摂動法とを巧妙に組み合わせて層流境界層を初めて解き，ポテンシャル流理論では解けなかった物体表面に作用するせん断応力 τ_w を理論的に求め，この理論値は実験値ときわめてよく一致したのである．このようにプラントルの門下生（ゲッチンゲン学派という）は，境界層理論の有効性を示し，その後の航空機・流体機器の開発に大きく貢献したのである[2]．これらの貢献からプラントルを「近代流体力学の父」と呼ぶ．

統計乱流理論と組織乱流理論

20世紀の流体力学の大きな特徴は，これまで難解とされてきた乱流に理論の糸口が見出されたことである[3]．流れには層流と乱流があり，これがレイノルズ数によって決まることが1883年レイノルズによって発見された．1935年に気象学者のテイラーによって等方性乱流理論が提唱された．この理論は座標の方向・回転によらない一様乱流に適用され，格子風洞実験からこの有効性が認められた．しかし，実際の乱流はせん断乱流（平均流速が分布をもつこと）で，大きな渦は主流の境界条件に依存して異方性となるが，大きな渦が崩壊して小さな渦になるに従って，圧力の等方性によって等方化指向が認められる．このような渦の崩壊に伴う乱れエネルギーの輸送をカスケード過程という．1941年に数学者のコルモゴロフによってカスケード過程で成立する局所等方性理論が提唱され，乱れ変動のスペクトル分布の $-5/3$ 乗則が導かれ，その有効性が風洞実験・大気乱流・海洋乱流・河川乱流などから認められ，現在，最も普遍性の高い理論となっている．1960年代は，エレクトロニクスおよびコンピュータの開発により気流計測の熱線流速計・圧力変換器等が高精度になり，境界層・管路の乱流構造はこれらの点計測と統計乱流理論（スペクトル・時空間相関手法）を駆使すれば，その全貌が解明されるという期待があった．しかし，乱れはそう単純ではなかった．

1967年，流れの可視化から，「乱流は文字通りランダムに乱れた流れではなく，空間的に秩序立ち，時間的にも周期的に発生する」というバースト現象や渦合体機構が発見され，従来の統計理論のみでは不十分であることがわかった[3]．このような乱れの組織構造（coherent structure）は一種のカオスであり，渦の発生・発達・崩壊という一連の過程をあたかも生き物のように行うのである．組織乱流理論はまだ確立されていないが，組織構造を条件付きのサンプリング手法や条件付き確率分布で理論解析や実験解析するのである[3]．従来の単純統計処理（無条件の長時間平均）では，組織構造が平滑化さ

れ，検出できないからである．また，組織構造は大規模な渦構造を成すから，運動量・熱・物質（浮遊砂など）の輸送機構の主因と考えられ，工学的にも重要な課題であり，現在精力的に研究されている．

最先端の流れ計測技術

水流の高精度計測が可能になったのは流体に非接触なレーザー流速計が実用化された 1980 年代以降である．これによって，2 次元・3 次元開水路乱流の計測が可能となり，2 次流や組織構造がかなり解明されてきた[3]．1990 年以降は，PIV（Particle-Image Velocimetry，流れの画像解析装置）が開発され，空間的な組織構造の時間的変化がアニメーションのように解析できるようになった．これらの機器を駆使すれば，複雑な流れやグローバルな流れを実験的に解明できる．すなわち，潤辺水理学，環境水理学，生態系水理学，界面水理学など 21 世紀での問題解決に威力を発揮するであろう．

数値流体力学 Computational Fluid Dynamics（CFD）

N–S 方程式を集合平均して得られる RANS 式（Reynolds averaged Navier Stokes equation）を乱れの輸送方程式と連立してコンピュータで解く技術が 1970 年代から始まった[2]．RANS 式は移流項の非線形のためにレイノルズ応力（2 次相関）が出現し，このためレイノルズ応力に関する輸送方程式を N–S 方程式から導くと，またしても移流項の非線形のために 3 次相関が出現し，結局，式自体が閉じていない．高次の相関を低次の相関で近似して方程式系を閉じさせることを「乱流モデル」という[1]．最も簡単なモデルが水理学で習う混合距離モデルである．k–ε モデルや応力モデルが有名であり，現在はより精緻でより複雑な乱流モデルが提案されているが，まだ普遍的なモデルはない．一方，スーパーコンピュータの開発で，N–S 方程式を直接解く技術（DNS）も 1990 年頃から本格化し出した．これらの CFD 技術は，21 世紀の花形となり，実験水理学を補完すると考えられる．

参考文献

1－禰津家久・冨永晃宏：水理学，朝倉書店，2000

2－禰津家久：水理学・流体力学における乱流の研究史と研究展望，土木学会誌，第74巻3月号，pp.45-52, 1989

3－Nezu, I. and Nakagawa, H.: Turbulence in open-channel flows, 国際水理学会モノグラフ，Balkema出版社，オランダ

過去

社会システムと応用数学・応用力学

宮城俊彦　Toshihiko MIYAGI
正会員　工博
岐阜大学教授　地域科学部

本小稿では，主に都市工学の分野で用いられている代表的な理論あるいはモデルと力学モデルの類似性と異質性を示すことによって，応用数学が社会科学の分野でどのように使われ進化してきているのかを紹介してみたい．無論，社会科学全般にわたる応用数学の普及と深度化の歴史に言及することが望ましいのであるが，限られた紙面と著者の力量不足もあり，トピックスを限定した方がより効果的な話題提供ができると考えた次第．

まず，社会科学の女王と呼ばれる経済学と応用数学，特に土木技術者との関連についての歴史的な経緯を簡単に触れた後，より限定した題材を用いて社会システム記述の方法と応用力学の類似性について述べる．内容的には若干マニアックになるが，「交通流・ネットワーク解析」という比較的古くから応用数学が利用されてきた分野に焦点を絞る．社会システムを分析する数理的アプローチは，多くのものを自然科学から導入しており，形式的には類似しているが，決定的に異なるのは，対象の中心が人間ということであり，その点で力学的アプローチとは大きく袂を分かつことになる．

数理経済学の発展と土木技術者の関わり：19 世紀

社会システムをどの範囲までとして捉えるかは意見の分かれるところであるが，応用数学・力学との関連性を云々するならば，基本的には数理経済学の視点から見た社会システムということになろう．

数理経済学の祖はクールノーといわれるが，彼は元々は数学者である．また，効用を主観的価値として捉え，対数効用関数を導入したのも「セント・ペテルスブルグの逆説」で知られるかのダニエル・ベルヌーイである．対数効用関数は，その後，精神物理学の一大法則であるウェーバー・ヘッヒナーの法則に応用される．近代経済学の体系化に大きく貢献したマーシャルも元々は物理学や数学を志していたといわれ，経済学に弾力性や速度といった物理学の用語を取り入れている．マーシャルは「経済均衡」を力学的均衡と生物学的均衡に分け，静的均衡を記述するのに力学的均衡概念を導入し，部分均衡モデルを完成させている．同時に，動学（dynamics）も扱っており，そこでは制度進化の思想を取り入れ，有機的成長を記述するのに生物的均衡概念が有効であると説いている．また，ノーベル賞経済学賞に輝くティンバーゲン，ドブリュー，サムエルソンは，それぞれ物理学，数学，電子工学の出身である．

土木との関連で言えば，19 世紀半ば，フランスの土木公団は多くのエンジニア・エコノミストを輩出しているが，それは交通網の整備を中心とした公共事業の経済学的合理性を探求することが，職業上不可欠であったからである．古典派経済学者が軽視していた公共事業という領域に果敢に臨み，現実の経済問題を具体的に解決する分析枠組みの構築に貢献している点は，現在のわが国の土木技術者と同じ立場にあり，共感が持てる．特に顕著なのは，既成の経済学が文献的調査アプローチに偏りがちであったのに不満を持ち，数学的手法を経済学に応用していった点である．彼らがいかに数学的手法に習熟していたかは，彼らも学んだ理工科学校で，かのラグランジェやラプラスなど，当時の一流の数学者が教鞭をとっていたことからも類推できる．

土木出身の経済学者の代表格が，消費者余剰の概念で知られるデュピュイである（デュピュイ自身は相対的効用と呼んだが，前述したマーシャルが消費者余剰と呼んで以降，この用語が定着した）．彼は，橋の通行料を徴収するにあたって，企業が利益最大化の論理で定める料金より，政府の課す料金が安くなるはずであると考え，その結果．利用者が受ける恩恵，すなわち，相対効用も大きくなるという論理にたどり着いた．彼の生きた19 世紀中期は，わが国では江戸時代の後期になるが，そのころの江戸でも橋には通行料があった．わが国ではどのような考え方で料金が定められていたか，興味の湧くところである．デュピュイは数学的定式化が公共事業における意思決定過程の厳密性と客観性を保証し，そのようなアプローチは経済問題においても有効であると考え，積極的に数学を経済学に応用した．また，土木学校や理科工学校で応用力学や解析学を教えていたナビエ（ナビエ・ストークの定理あるいはフーリエの遺稿をまとめて出版したことで知られている）も公共経済学や効用について論じているのは興味深い．しかし，当時，土木技術者によって展開された経済学への数学的アプローチは，経済学者からの批判はあっても，評価はされなかったようである[1)]．

近代経済学の最大の成果とも言える一般均衡理論の構築に深く関わったレオン・ワルラスも鉱山学校の出身であり，彼の父と前述したクールノーは高等師範学校の同窓生で親交があったということを考えると，クールノーも構想していた一般均衡理論がワルラスによって一応の完成をみたのは偶然ではなかろう．ワルラスの一般均衡理論は，数学的には非線形連立方程式を解く問題である．ワルラスは未知数と方程式の数を比較し，それが同数になることより解の存在を示唆するにとどまっていたが，一般均衡理論では，より一般的な市場条件の下で解が存在するかどうかが非常に大きな問題になる．価格は数量の写像なので，一般均衡の存在証明と解法は結局，ある写像が与えられた場合の不動点，すなわち

$$f(x^*)=x^*$$

が成立する x^* の存在証明とそれを求める問題に帰着する．このような厳密な一般均衡解の存在問題と解法は，20 世紀の数学に持ち越されることになる．不動点問題は応用範囲が広く，後述する交通ネットワーク均衡問題も不動点問題として定式化できることが知られている．私は，20 年ほど前に交通ネットワーク均衡問題に不動点アルゴリズムを適用する研究を行っていた時期があるが，指導した大学院の学生の修論発表会で，構造力学の先生が有限要素法に似ているという感想をもらされたのを記憶している．無論，不動点アルゴリズムは有限要素法とは全く独立に発展した手法であるが，学問とはどこかしらで強く結びついており，共通点があるようだ．

話が少し横道へそれたが，いずれにせよ，数理経済学の黎明期にはフランス土木学校を中心に理工系出身の技術者が大きく関わっていたことは，大いに注目すべきであろう．

オペレーションズ・リサーチの発展：20 世紀

さて，近年では数理経済学に限らず計量心理学，計量経済学，数理言語学，政策科学の発展に見られるように，数学は自然系領域の固有の学問ではなくなってきている．近年では，社会システムを数理的に探求する学問の総称として社会工学という名称も使われるようになっているが，その名の由来はカール・ポッパーであるとする説もある．ポッパーは「すべての科学は反証可能でなければならない」と唱え，サミュエルソンの実証主義経済学にも影響を与えたことで知られている．ただ，社会工学はまだ未完成の学問領域であり，その定義も定まっていないというのが筆者の認識である．そこで話題をもっと身近なところにおいて，土木計画学，都市工学といった工学システムと社会システムの学際領域を探求する分野における応用数学あるいは応用力学とそれらの関係を簡単に振り返ってみたい．

第二次世界大戦後発展したオペレーションズ・リサーチ（OR）は，経営科学や政策科学における重要な技術的手法としてわが国にも導入された．はじめは，品質管理などの統計的手法に実業界の関心が集まったが，数理工学の研究者によって線形計画法を中心とした数理計画法，待ち行列理論，PERT/CPM，ゲーム理論なども紹介され[2]，土木計画学の分野[3] でも OR の導入は各大学に急速に浸透した．

この流れに特に敏感だったのは，交通流そして交通流理論をベースにした交通ネットワーク分析の分野であろう．戦後の自動車社会の到来は，交通工学という学問体系を急速に発展させた．道路上の交通流を記述するのに流体力学を応用しようというアイデアはごく自然な発想であり，交通流の研究は連続流体の応用モデルとしてスタートした．交通流は多数の車両の運動より構成されるので，巨視的に捉えるとあたかも連続した圧縮流体のように捉えることができる．その後，間もなく独自の交通流モデルが提案されるようになる．わが国の OR 学会の創設期には，微分方程式によって道路上の交通流を記述する追従モデルが京都大学の佐佐木教授によって発表され，追従理論の発展に大きな足跡を残している．交通流研究には多くの数学者や物理学者が応用研究の一環として参画した．複雑性の研究で知られ，ノーベル賞物理学賞に輝くプリゴジンなども交通流理論に関する本を出版している．

原理・原則の重要性

交通流理論は主に単路部における車の流れを記述するが，都市の道路網の効率的な計画と運用を図るためには，交通ネットワーク上の流れを数理的に扱う必要があった．交通ネットワーク分析の分野でも，当初は OR の分野で確立された手法を応用する試みが主であった．最短経路探索アルゴリズムの利用はその典型であり，最大流問題や最小費用流問題なども比較的研究された手法である．しかし，交通ネットワーク分析が交通流研究と最も異なる点は，「ドライバーの経路選択」という，人間の選択行動を記述する必要に迫られたことであろう．OR は確かに，大規模で複雑なシステムを数学的に記述し，計算機で効率的に処理できるシステムを構築できるという点では大きな貢献を成したが，それに終始するあまり，社会システムの固有の特質である人間系をどう扱うかという点が，若干なおざりにされていた感があった．社会システムを記述するのに，単に応用数学や応用力学を利用するという立場から，人間の価値，それに基づく選択行動の表現がより重要な課題として認識されるようになってきている．

交通ネットワーク分析の例でいえば，ネットワーク交通流を求める基本原理は，電気回路網におけるマックスェルの最小発熱定理，あるいは応用力学における最小仕事原理と類似のものである．そこでは，応力－ひずみ曲線と類似の交通量－所要時間曲線が用いられる．応力に対応して交通量，ひずみには所要時間が対応する（図-1，図-2）．このとき，微小な応力増加に伴う仕事に対応するのが，追加的交通量によって発生する混雑費用であり，応用力学における仕事と相補仕事の和は，ネットワークの総交通費用に対応する．交通ネットワーク均衡問題とは，交通流の保存条件の下で W を最小にするようなネットワーク交通流を求める問題である．このように，ネットワーク解析で用いられる手法は，形式的には力学モデルに類似している．社会システムの場合でも，その構成要素が合理的に挙動し，システムとして効率的に作動するならば力学モデルと類似の原理・原則が適用できるということなのであろう．しかし，その背景にある原理は力学系ではなく人間系であり，その行動原理によって解釈されねばならない．

類似の現象は地域科学の分野でも発生した．小売店舗の商圏の分析に応用され，また，交通の地域間分布モデルとして利用された重力モデルは，ニュートンの重力法則のアナロジーとして社会科学の分野へ導入されたモデルの典型であろう．こうした社会科学における重力法則

もその後，効用理論を用いた再定式化が行われ，行動論的側面が強調されるようになってきた．

原理・原則の応用，類似性の探求の中にも，独自の枠組みと固有領域を発展させることが重要であることは言うまでもない．マーシャルの消費者余剰は，デュピュイの影響を受けたことは間違いない．しかし，経済学独自の枠組みの中で咀嚼され，経済学の用語としてそれは息づいている．公共事業の効率性と社会性を問う学問体系が，公共経済学という形で経済学に定着し，なぜ土木工学では体系化できなかったのか，今一度考える必要があるかもしれない．

前述したように，近年の数理科学の発展は，社会システムモデルにますます大きな影響を与えるようになってきており，物理社会学という領域が出現してきたように，物理的な発想が数学を通して社会モデルと結びつけられる，あるいは逆のケースが生じるという状況は今後とも増えるものと思われる．こうした状況のもとでは，物理システム，社会システムを統一する原理・原則が存在するのではなかろうかと期待を持つのは当然であり，事実，その探求は，過去にも多くの思想家，科学者の心を惹きつけてきた．この考えは現時点では期待はずれの幻想といえそうだが，ただ，統合化への衝動は，多くの危険にもかかわらず否定し去られはしないであろう．

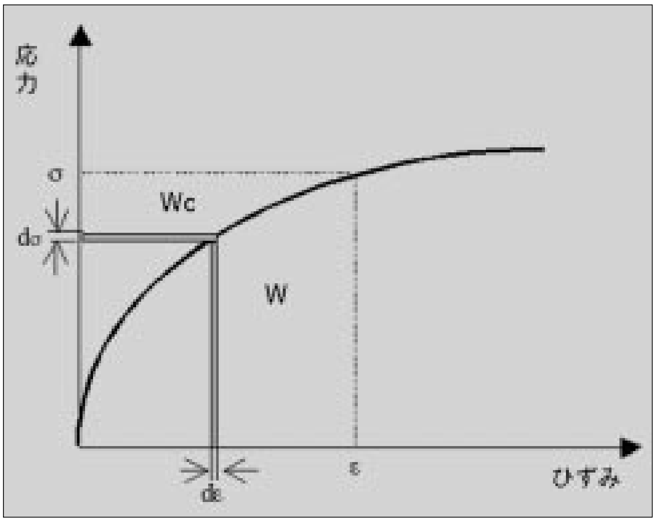


図-1　応力とひずみの関係

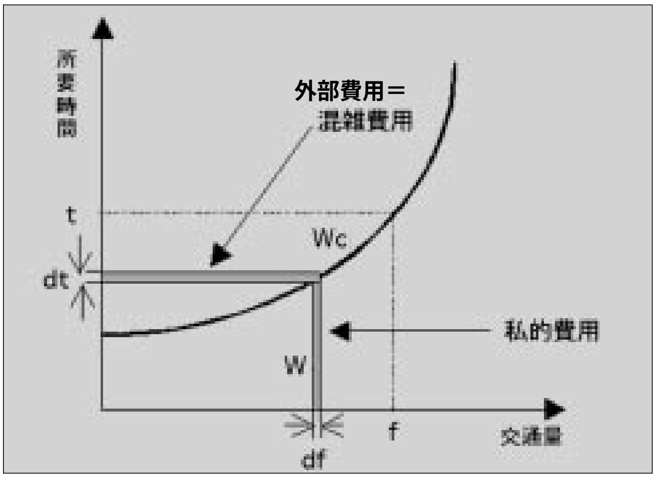


図-2　交通量と所要時間の関係

参考文献

1－栗田啓子：エンジニア・エコノミスト－フランス公共経済学の成立，東京大学出版会，1992

2－わが国のORの発展の歴史は，森口繁一教授の退官を記念して発行された「生きている数学－数理工学の発展，培風館，1979」に詳しい．

3－ 吉川和弘：土木計画とOR，丸善，1969

2.　応用力学のエッセンス

応用力学の体系

連続体力学・応用数学から計算力学までの発展の経緯

西村直志　Naoshi NISHIMURA
正会員　工博
京都大学助教授　大学院工学研究科環境地球工学専攻地圏工学講座

本稿では，理論的な応用力学の体系について，固体力学・計算力学を中心に簡単にその発展の経緯を紹介する．

応用力学の全体像とそのエッセンス

米国機械学会（ASME）の Applied Mechanics Reviews 誌（AMR）は，電子情報がたやすく手に入るようになった今日でも，多くの応用力学の研究者がお世話になる review 誌である．AMR では応用力学を

1. foundations and basic methods
2. dynamics and vibration
3. automatic control
4. mechanics of solids
5. mechanics of fluids
6. heat transfer
7. earth sciences
8. energy and environment
9. bioengineering

と，基本的には対象別の大分類にまとめている．すなわち，これらの種々の分野の総体が応用力学であるということになろう．しかし，個々の項目を詳細に検討すると，対象は異なっても，扱う方法には共通点が多いことに気づく．例えば，固体力学と流体力学は，どちらも変形する物体の力学である．実際，これらの力学を各論として含む一般論は，連続体力学と呼ばれている．このように，学問としての応用力学は，実は少数のエッセンスから成り立っていると言うことができる．今回の特集では，応用力学を連続体力学，応用数学，計算力学のエッセンスから捉えたいと考える．それぞれのエッセンスの内容については，以下の各記事で詳しく述べられるので，本稿ではそれに先立って，これらのエッセンスが大略どのようなもので，おのおのがどのように関わっているのかを述べることにより，応用力学の全体像を捉えることを試みる．そのためには，連続体力学の成立の経緯と最近の発展を概観してみるのが良いように思われる．

応用力学の成立

現在，われわれが対象としている応用力学は，特殊な場合を除いて Newton 力学に立脚している．Newton の時代から今世紀の初めまで，理論的な力学といえば質点系の力学を指すのが普通であった．実際，物理学者たちは，質点系の Newton 力学を応用して，天体の運行から気体の挙動に至るまで種々の理論を展開してきた．彼らは，われわれの身の回りにある物体は粒々でも剛体でもないが，詳細に見ていけば多数の構成粒子に行きつき，それら粒子の力学から巨視的な物体の運動を記述することが本質であると考えていたのであろう．一方，連続体力学は，広がりを持った物体を粒子ではなく連続に分布するものと捉えて理論を展開する．物体をすべて無数の粒子として取り扱うより，遥かに現実的な見方であると言えよう．しかし一方で，事の本質は粒子であると考える人びとからは，連続体力学は現象論ないしは近似理論と見られてきた．「応用」力学と呼ばれるゆえんである．そのような経緯もあって，連続体力学（より正確には，弾性体や流体の力学と言うべきかもしれない）の形成は多くを数学者に依存してきた．実際，今日われわれが用いている連続体力学の骨格を築き上げたのは Bernoulli, Euler であり，そしてとりわけ大きな寄与があったのが Cauchy である．実際，彼らの名前を冠した連続体の力学上の概念や結果が多数あることは，この分野を学んだことのある者は誰でも知っていよう．また，ベクトルを一般化した数学概念であるテンソルという名称が応力（tension 仏）に由来したものであるのも，数学者と連続体力学の結びつきと無縁ではない．このように，応用力学はその形成の初期から数学者の参画を得，また数学者は応用力学から題材を取るなどして，お互いに密接な関係を保っていた．

固体力学の発展

連続体力学という学問は，初めから存在していたわけではない．実際，長らく弾性体の力学とか流体の力学と

いった個別の力学が分立している状態であった．これらのうち固体の力学は，変位・変形が小さいとする微小変形の仮定や，応力とひずみが線形的に関連するという線形構成関係で十分説明のつく現象が少なくないことと，そのような仮定の下に得られた線形問題では求解が可能な場合が比較的多いため，早くから研究の中心は個々の問題の解を求めることに向いていた．このような研究に携わったのは，具体的な問題の解を必要とする工学者や，境界値問題の解析を専門とする応用数学者たちであった．こういった研究においては，いかに巧妙に問題を解くかが興味の大きな部分を占め，極論すれば固体力学の研究とは，固体力学に現れる偏微分方程式を，与えられた初期条件，境界条件の下に解く，いわゆる初期値境界値問題の解法に関する研究に他ならなかった．こうして応用力学と応用数学の区別がつきにくい状況となった．特に，解析の有力な手段として手計算しかなかった時代には，解けない問題を考えることには意義を見いだし難く，どうせ解けない非線形の一般論を扱うよりも，解ける線形問題を中心に研究が行われた．このようにして今世紀前半には優れた境界値問題の解析的解法が多数研究され，特に2次元弾性問題における複素関数の利用や，3次元弾性論における種々のpotential関数など，また動弾性問題における巧妙な積分変換法など，今日弾性学の古典と考えられている多くのものが成立した．こうして今世紀中ごろには，解けそうな問題はほとんど解かれてしまう状況が現出したように思われる．

なお，こういった境界値問題の解法としての固体力学の流れに加えて，転位論，破壊力学，マイクロメカニクス等，材料力学・材料科学における固体力学の応用の今日まで続く流れも忘れてはなるまい．転位論は食い違いの，破壊力学はクラックの，マイクロメカニクスは介在物の弾性論を，それぞれ主要な道具としている．

流体力学の発展

一方流体力学では，構成関係には線形性を仮定することは許されても，特殊な場合を除いて微小変形を仮定するわけにはいかない．したがって，線形理論の有用性は，固体力学の場合に比べて限定的である．確かに，非線形性の問題を直接扱うことを避けて，固体力学の場合と同様に線形理論，すなわち粘性（と流体の渦の存在）を無視して作られたpotential流理論の解析が研究されてはいる．特に水の波の問題は，今でもpotential流理論で取り扱うのが一般的である（境界条件は非線形である）．しかし，potential流理論では，例えば工学上重要な流体中の物体が受ける力（流体力）を完全に評価することはできない．実際，流体中の物体の周辺に発生する流速の変化が著しい領域での粘性の効果を考えないと，流体力は求められない．そこで，物体周辺のせん断力の大きい部分を取り扱うための境界層理論など，種々の近似理論が発達した．他にも，種々の分岐理論や，有限振幅波動の理論など，非線形性の影響を近似的に取り込もうとする試みが多数あった．また，日ごろ目にする高速な流れは乱れを伴っており，乱流現象は古くから流体力学の主要な関心事の一つであった．計算機以前の流体力学ではこれらを取り扱うための統計理論が発達し，統計量に対する種々のモデルや乱流の構成式が提案された．このように流体力学は，多くの数学者の寄与があったにしても，固体力学に比べて幾分各論的な力学寄りの発展をしてきたように感じられる．それは，非線形性の卓越した複雑な個々の現象に対する物理的な理解がないと，物理的に意味がある「解ける」問題を設定することが難しいからかもしれない．

有理力学

さて，固体力学の線形問題がほとんど解かれてしまった今世紀中ごろ，応用数学者たちの間に新しい力学の動きが現れた．それは，連続体力学をいくつかの公理の上に構築しようとするもので，有理力学と呼ばれる．これは，直接的には有名なHilbertの23の問題（1900）の6番目である「物理学の諸問題の公理化」に真正直に取り組んだもので，Bourbakiの活動に代表される当時の非常に潔癖な数学界の雰囲気を反映したものであったのかもしれない．

実は，それまでの応用力学は，答が求められそうな問題を扱うことに主眼がおかれていたため，突き詰めて一般論を研究することは案外行われていなかった．このため，有理力学の研究は従来の応用力学の「ぼろ」を多数暴き出すこととなり，この過程で応用力学は整理されていった．特に構成式の理論は大幅に進歩し，中でも客観性の原理は，有理力学の金字塔ともいうべき成果であった．客観性の原理とは，仮にもある法則が宇宙のいろいろな時間や場所にいる観測者に共通に認識されるために満たさなければならない条件を書き下したものであって，構成式に限らず，この条件を満たさない法則は認識され得ないことになる．例えば，「異方性の線形粘性流体は客観性を持たないので，そのような物質はありえない」というように使う．もっともNewton力学自体にも客観性はないのだが．また，理論を厳密に展開すると，固体

力学と流体力学を分ける理由がなくなり，今日連続体力学と呼ばれる理論体系が成立した．このように目覚しい成果をあげた有理力学から何らかの影響を受けた工学者は少なくはなかった．

有理力学の内容を今の目で客観的に評価してみると，それはごく当たり前の大変形の力学である．今では有理力学の成果は有限要素法コードに組み込まれ，それと知られぬままに日常的に使われている．また，有理力学の研究者に徹底的に整理されたおかげで，連続体力学は非常に見通しの良い，学びやすい学問になった．しかし，有理力学の研究者がことさらのように強調した公理化は，誤解を生むだけの不毛な努力であった．またその間，数学の世界でも雰囲気が変わり，物理や工学の問題にヒントを得ようとする動きが活発になる一方で，力学の公理化に意義を感ずる数学者はいなくなったようである．

計算力学の成立

有理力学の研究が盛んに行われた 1960 年代は，ちょうど有限要素法の発展期に当たり，まだまだ計算機の能力は低かった．しかし，60 年代も後半になると Zienkiewicz の有名な有限要素法の本が出て，計算機を用いた力学への関心は確実に高まっていった．はじめは 2 次元の線形問題に限られていた有限要素法は着実に適用範囲を広め，非線形弾性や弾塑性，大変形問題，種々の 3 次元問題にまで適用されるようになった．要するに，増分的に線形なものなら何でも解けるようになってきた．さらに良いことに，有限要素法は，力学の基礎方程式のように何らかの保存則を表す偏微分方程式の数値解法として非常に都合の良いものである．それなら将来的には，これまでの応用力学につきまとってきた解ける問題を得るための簡単化（矮小化と言っても良かろう）をする必要がなくなるのではないか．例えば，連続体力学の一般論だけから何の近似も用いずに導いた方程式を，有限要素法で日常的に解く時代が来るのではないかと考える人たちが現れた．実際，破壊力学で有名な J.R. Rice のような理論家が大変形の有限要素法の開発に関わっているし，Texas 大学の Oden は，数値計算法，有理力学と応用数学の融合を目指していた．もちろん，従来の応用力学においても数値的な手法がなかったわけではない．しかし，これまでの数値手法が，解析的な手段の補助としての「数値計算」であったのに対して，これらの人びとの目指した新しい力学は計算機の利用を中心に据えたものであった．それは有理力学に代表される，あまりにも理論的になり過ぎた応用力学を，もう一度使える力学に変えていこうとする試みでもあった．Oden は，このような力学を computational mechanics（計算力学）と呼んだ．

こうして，応用数学や，後には計算機科学の強い影響を受けつつ，固体力学，流体力学から計算力学に至る応用力学の体系が成立した．その成り立ちや物理学，数学との距離に注目して体系図を描くと，図-1 のようなものになるのであろう．

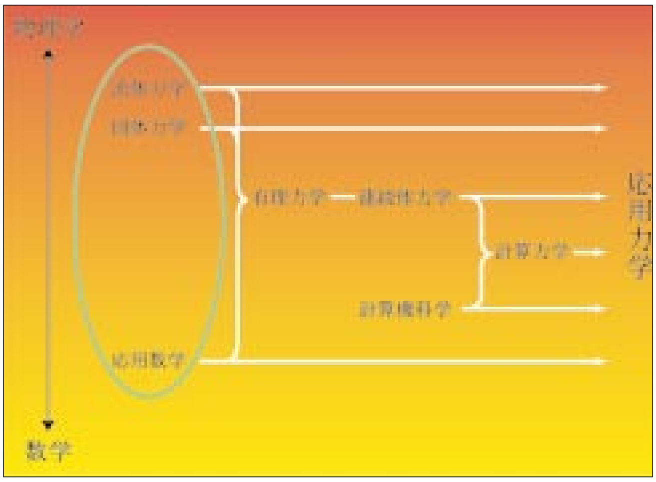


図-1　応用力学の体系

計算力学の手法と研究課題

応用力学の研究が偏微分方程式の解析を伴うことはすでに述べた．すなわち，未知の関数を求める問題を解くことになる．計算機を用いて連続量である関数を扱うためには，その関数を有限個の数で表現することが必要になる．この操作を離散化と呼ぶ．例えば，いくつかの点での関数値で元の関数を表す等である．

通常，偏微分方程式は，離散化によって大規模な代数方程式に帰着される．そのような離散化手法のうち，上にも述べた有限要素法は最も有力なものの一つである．具体的な方法は本特集寺田氏による解説に詳しいが，いわゆる有限要素補間と，仮想仕事の原理に基づく偏微分方程式の数値解法である．実は，数学の世界においても，われわれが仮想仕事の原理と呼ぶ方法によって偏微分方程式の理論を展開することは極めて標準的となっている．このため，有限要素法は早くから数学者の関心を惹き（なお，数学の世界では有限要素法の創始者は有名な『数理物理学の方法』の著者の一人である Courant であるということになっている），また，きれいな数学の道具がうまく使えるため，有限要素法の数学理論はフランスを中心に早くから発展した．力学に用いられる数値手法は有限要素法だけではない．有限要素法より長い歴史を持ち，今なお偏微分方程式の数値解法の王者の地位

を保っているのは，差分法であろう．差分法は，偏微分方程式に含まれる微分を差分に置き換えて離散化する手法であり，どんな微分方程式でも形式的には簡単に差分化できる特徴を有している．また，得られる係数行列が規則的であることの利点は，大規模問題を解く上では計り知れない．任意形状の領域を取り扱うことが有限要素法ほど簡単ではないことは差分法の欠点とは言えるが，この点でも改良が進んでいる．もう一つの有力な偏微分方程式の離散解法は，境界要素法である．この方法は，差分法や有限要素法が，考える領域の内部を離散化しなければならないのに対して，境界だけを離散化すれば良いという特徴を持っている．このため，一見効率が良さそうに見えるので大いにもてはやされたこともあったが，実は得られる行列が密行列であることが災いして，疎行列を与える差分法や有限要素法より大きい問題を解くことはできない．このため，一時は電磁気，音響，波動問題，破壊力学など特殊な用途にしか用いられなくなったが，最近，高速多重極法というアルゴリズム上のブレークスルーがあって，大規模問題の解法としての地位を回復しつつある．

さて，離散化は，元々無限個の自由度を持っている関数（例えば関数を Taylor 展開すると，一般には無限個の係数が得られる．これは関数が無限個の自由度を持っていることを表している）を有限自由度で表すのだから，当然近似を伴う．したがって，計算力学においては，使用する手法が，まず数値解析の立場から最低限の「品質」を有しているかどうか，すなわち，離散化に伴って導入される誤差が，離散化の精度を上げたときに本当に 0 に近づくか（収束性），時間依存問題では，長時間計算を続けても誤差が拡大しないか（安定性）等の確認を行う必要がある（実はこれらの概念は互いに密接に関連している）．また問題に適した算法・アルゴリズムが用いられているかの検討も重要で，大規模な代数方程式の解法の研究や，Fourier 変換の算法における FFT（高速 Fourier 変換）の利用，また，最近では，前述の高速多重極法による境界要素法の高速化などがあげられる．こういった研究は，時として劇的な効果をもたらし，主として応用数学者や，計算機科学者の仕事の応用であることが多いが，工学者の自由な発想が効を奏することもある．しかし，計算力学の研究としてある意味でより一般的なのは，その手法が使いやすいか，実用的な計算時間で必要な精度の解を得ることができるか等に関する研究である．これらの検証は，結局数値計算を通して実証的に調べる（数値実験という）より他になく，計算力学の多くの論文は，そのような検証を目的として書かれている．さらには，より大きな問題を効率良く解くためのベクトル・パラレルコンピュータの利用，また，それらの計算機に適した計算アルゴリズムの開発などの研究が行われている．このように，計算力学の発展によって，応用力学の体系には新たに数値解析学，計算機科学および数値実験的なフロントが付け加わった．さらには，微分方程式では記述されないような力学モデル（例えば粒状体や，それに類したモデル）の解析や，原理的には計算機と直接関わっていなくても，実際研究をしようとすると計算機利用を前提とせざるを得ないような分野（例えば，周期的な内部構造を有する物体の力学である均質化法，結果から原因を推定する逆問題）など，計算力学自体の範囲も広がってきている．

計算力学の発展

計算力学の発展はその後とどまるところを知らず，例えば，従来は何らかのモデル化なくしては解くことができなかった乱流問題さえ，単に Navier・Stokes 方程式を直接解くことによって扱おうとする試み（DNS と呼ばれる）がなされるところまで来ている．こうして，従来は実験でしか調べようがなかったような事柄が計算に置き換わってきている．特に，物性パラメータと相似律の兼ね合いから，実物と同じ条件で実験を行うことが難しいような場合は，むしろ数値実験の方が物理的な実験より良い情報を与えることもあり得るのである．

このようにして現実的な問題が解けるようになってくると，従来力学の対象とは考えられなかったような内容が，計算力学の重要な研究対象となってきた．例えば，差分法や有限要素法の格子，要素生成であるとか，膨大な数値結果をいかにわかりやすく表示するかの研究（可視化）などである．特に後者は，人と計算機との間のインターフェースの研究に他ならず，計算機支援工学（CAE），計算機支援設計（CAD）の発達とも関連している．こうして，計算機の利用は従来の数値計算の延長を大きく離れ，計算力学自体も応用力学の枠に収まり切らなくなりつつある．

おわりに

以上，本稿では，応用力学が，工学者と応用数学者，そして最近では計算機科学の研究者が入り交じって形成されてきた様子を見てきた．少し理論寄りの応用力学の国際会議などに出席されると，本当に多数の分野の専門家が混ざりあっていることを実感することができよう．

最近の応用力学の発展についてはずいぶん計算力学寄りの記述をしたが，筆者は数学的な手法が衰えつつあるなどと言うつもりは毛頭ない．今でも一番確実なことを言えるのは解析的な方法であることには変わりはなく，数値的手法の品質保証には数学的な考察が重要である（もっとも，それとてずっと先には精度保証つき数値計算などに置き換わってゆくものなのかもしれない）．また，Soliton（孤立波）の理論のように，非線形波動の数値計算結果から出発して，解ける非線形微分方程式に関する一大数学理論へと発展した例もあることを記しておきたい．しかしながら，今後いかなる力学の研究も，もはや計算力学の進歩と無関係に進めることはできないであろう．また，力学の教育においても計算力学の進歩を取り入れることは重要であり，従来の各論中心の力学教育が通用しなくなる日も，そう遠くないのかもしれない．

連続体力学のエッセンス

その芽生えから非線形連続体力学の確立まで

矢富盟祥　Chikayoshi YATOMI
正会員　Ph. D.
金沢大学教授　工学部土木建設工学科

連続体力学とは，原子，分子，あるいは土粒子などのような物質を構成している膨大な数，かつ複雑な形状を持った要素自身の個々の運動を追求することなく，それより大きな，物理ないし工学的に重要な時間および空間スケールでの物質の連続的な力学的挙動を現象論的に研究する学問である．

連続体力学の芽生え

昨年の夏，イタリアを訪問した折，フィレンツェからトスカーナ地方を通過し，ガリレオ・ガリレイ（1564-1642）の生地でもあり，彼の実験と斜塔で有名なピサに向かう途中，レオナルド・ダ・ヴィンチ（1452-1519）（図-1）の生地，ヴィンチ村に寄り，彼の生家と記念館を見学した．通常，「力学」の教科書では，このガリレイの落体運動の実験の話から始まる．彼はその後，片持ち梁の破壊強度に関する内容を「Two New Science」（1638）に記述している．また，「力学」や「連続体力学」の教科書では，その基礎は，1687年にアイザック・ニュートン（1643-1727）によって出版された著書「プリンキピア」（3 巻）中の“質量と加速度の積は力に等しい”という「運動の法則」の発見にあると記されている．しかし，この有名なニュートンの方程式と呼ばれている「運動の法則」を数学的に表したのは，1752 年，レオンハルト・オイラー（1707-1783）によるものであり，その後，彼は 1776 年「連続体力学」において，重要な「オイラーの法則」と呼ばれている積分形の「運動量，角運動量の法則」を発表している．そんなことを思いつつ今回のレオナルドの記念館を見学した後，実は，数学を駆使した理論的なものではないが，物理現象を

図-1　1515年頃のレオナルド自画像

図-2　棒やバネの曲げの観察[1)]

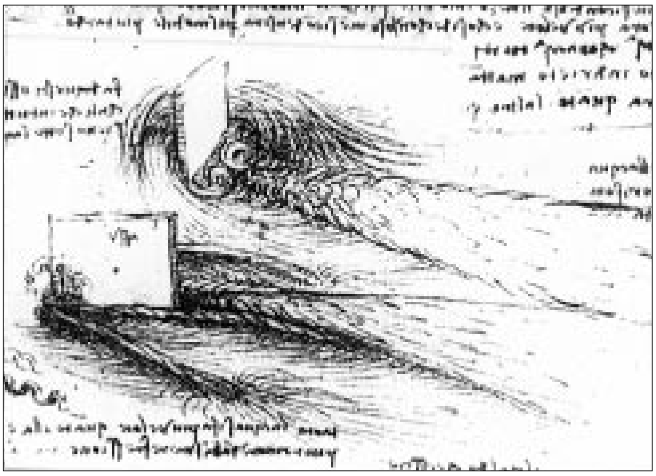


図-3　方向の異なる板周りの定常流れの観察[1)]

「連続体力学」的に最初に観察・記述したものは，ガリレイやニュートンではなく，彼らより 100 年以上も前に記されたレオナルド・ダ・ヴィンチの研究記録ノートではないかと感じた．このノートはすべて左手で書かれ，なぜか右から左に綴った鏡像文字で記されている（図-2，図-3）．この膨大な量のノートには，数多くの人物や動物

の緻密な解剖図，教会や橋梁などの建築・土木構造物の設計図，さらには，この時代すでに，飛行機械や現在使われているようなヘリコプターの考案図まで描かれている．このノートが連続体力学における流体力学的記述の最初ではないかと思えたのは，板周りの定常流れを，板の方向を変えて考察し，カルマン渦とも思える流況の詳細な観察図（図-3）や，静かな水面に落ちた石によって生じる波紋を研究し，「水粒子も動いているようにみえるが，実はそうでなく，水粒子は，その位置を保ち，媒質としての水の一部が揺れ（波動）を伝えている」と結論し，伝わる速度に差こそあれ音，光の伝導にもあてはまると，現代の連続体力学の波動理論の本質を明確に予測していること．また，固体力学的記述においても，棒やバネの曲げを観察し（図-2），「その伸縮量は，中立軸を境に上下方向に，板中央からの距離に比例する」という，ヨハン・ベルヌーイ（1667-1748）の梁理論の基礎を200年以上も前に明確に記述していることにある．したがって，力学的現象を物理学的に明らかにする姿勢で観察を行ったのは，質点力学的観点では17世紀初めのガリレイが最初であろうが，連続体力学的観点では，それより約100年前のレオナルド・ダ・ヴィンチが最初ではないだろうか．

非線形連続体力学の問題

物体の変形挙動を考察するため，適当な「基準状態k」を定め，その時の時刻を$t=0$とする．その基準状態にある物体中の任意の位置ベクトル$\boldsymbol{X}$が，時刻$t=t$での「変形状態」の物体中の位置ベクトル$\boldsymbol{x}=\hat{x}(\boldsymbol{X}, t)$に移動したとする．このとき$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}$を「変位」という．対象とされる物体の変形状態の境界に表面力tなどの力学的条件や，変位$\boldsymbol{u}$，速度v，速度勾配$\boldsymbol{L}=\partial v/\partial \boldsymbol{x}$などの幾何学的条件が「境界条件」として与えられる．またこれと同時に，基準状態での物体の各点で種々の物理量の「初期条件」が与えられている問題を考える．このとき，その物体内部の任意時刻の密度ρ，コーシー応力場$\boldsymbol{T}$や，変位場$\boldsymbol{u}$，速度場v，変形勾配$\boldsymbol{F}=\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{X}$，速度勾配$\boldsymbol{L}$などの種々の幾何学的場を求める問題を「連続体の初期値・境界値問題」という．この問題を解くために必要な支配方程式は，どんな物体でも成立すべき：①質量保存則，②運動方程式，③コーシー応力$\boldsymbol{T}$の対称性，および④$\boldsymbol{F}=\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{L}=\partial v/\partial \boldsymbol{x}$の関係式と物体の特性，すなわち物体の違いを表すコーシー応力$\boldsymbol{T}$と変形，例えば，変形勾配$\boldsymbol{F}$や速度勾配$\boldsymbol{L}$の対称部分である変形速度$\boldsymbol{D}$との関係を表す⑤「**構成式**」である．構成式が線形でも変位，速度，あるいは速度勾配などの幾何学的な量が大きくなり非線形問題になる場合には，「幾何学的非線形問題」，逆に，幾何学的な量は小さくても構成式が非線形となる場合を「材料的非線形問題」と呼ばれる．固体力学の分野では幾何学的な量は小さく，構成式も線形と考えられる場合を「微小変形理論」，幾何学的な量も大きく，構成式も非線形と考えられる場合を「有限変形理論」と呼ぶ．有限変形理論における境界依存型の境界条件や波浪の砕波問題のように，物体の境界自身が変形するために非線形となる問題を「移動境界値問題」と呼ぶこともある．

非線形構成式の誕生

非線形連続体力学における固体の有限変形理論の基礎的研究は，A–L.コーシー（1789-1857）により1823年から1841年の間に精力的に研究された．しかし，彼自身は，同時にその有限変形理論から微小変形理論を導き，線形連続体力学の研究を精力的に行った．また，流体においては，1845年，ジョージ・ストークス（1819-1903）が，非線形粘性流体の一般形の構成式を提案してはいたが，その後1世紀の間，非線形粘性流体の研究はほとんど行われなかった．1845年から1945年の100年間，非線形構成式の研究がほとんど進展しなかったのは，当時の産業に必要な研究には，線形構成式による解で十分であったこと．また当時はコンピュータがないこともあり，流体力学における境界層理論などの特殊な場合を除き，応用数学・応用力学者たちは線形境界値問題の理論解を得ることに全力を注いでいたことにある．新しい非線形構成式の幕開けとなった研究は，1945年，土木技術者であったM.ライナーが圧縮性の粘性流体とみなせるアスファルトの構成式のダイラタンシー現象（せん断変形をすると，その物体の体積も変化する現象）に着目し，非線形粘性流体の構成式の特殊な場合ではなく，3次元の一般的な非線形構成式を，次式のように非常にきれいで簡単な式で表せることを発表したことに始まる．

$$\boldsymbol{T}=\alpha_0\boldsymbol{1}+\alpha_1\boldsymbol{D}+\alpha_2\boldsymbol{D}^2,$$
$$\alpha_k=\alpha_k(\mathrm{I}_D,\ \mathrm{II}_D,\ \mathrm{III}_D),\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{T}$はコーシー応力，$\boldsymbol{D}$は変形速度，α_kは$\boldsymbol{D}$の3つの不変量$\mathrm{I}_D=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}$，$\mathrm{II}_D=\{(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D})^2-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}^2\}/2$，$\mathrm{III}_D=\det(\boldsymbol{D})$のスカラー関数である．上式で，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}=D_{11}+D_{22}+D_{33}$を意味し，$\det(\boldsymbol{D})$は$\boldsymbol{D}$の行列式である．：不変量とは，変数である$\boldsymbol{D}$を$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T$に変換してもその値が変わらない量である．この$\boldsymbol{Q}$は直交テンソルであり，$\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{1}$で定義されているので，$\det(\boldsymbol{Q})=\pm1$とな

る．$\mathbf{Q}$ の幾何学的意味は，$\det(\mathbf{Q}) = +1$ の値のときは剛体回転，-1 の値のときは反転回転の意味を持つが，本記事ではその区別をせず単に剛体回転と呼ぶ．式（1）が $\mathbf{D}$ の2乗までで終わっているのは，3次元の場合のケーリー・ハミルトンの定理：$\mathbf{D}^3 = \mathrm{I}_D\mathbf{D}^2 - \mathrm{II}_D\mathbf{D} + \mathrm{III}_D\mathbf{1}$ を使うと，$\mathbf{D}$ の3乗以上の項はすべて $\mathbf{D}$ の2乗以下で表せるからである．他の非線形特性は，3個の不変量 I_D，II_D，III_D だけで表されているスカラー関数 α_k に潜んでしまっている．ダイラタンシー効果や，同心円管内に粘性流体を入れ，内外管を異なる速度で回転させたとき，流体の内管側が外管側より高くなり．流体が内管に沿って這い上がるワイゼンベルグの法線応力効果も，この $\mathbf{D}^2$ の非線形効果として説明できることは興味深い．

構成式に関する基本法則

ここでは，構成式の基本法則のうち混同されやすい2つの重要な法則をとりあげ，その概略を述べる．なお議論を簡単にするため構成式の中に時刻 t と基準状態の位置 $\mathbf{X}$ が陽に入らない均一物質のみを考える．

1）客観性の原理（Principle of Material Indifference）

「構成式の関係は，互いに異なる運動をしている観測者に無関係である」言い換えれば，「構成式の関係は，剛体運動だけ異なる変形状態を考えたとき，どちらでも同じ関係となる」簡単な例として，図-4のように，剛性 k を持つ水平な方向にある，1次元線形バネを考え，その左端を固定する．このとき，ある観察者がバネの自由端に，力 $\mathbf{f}$ を水平に与え，そのときのバネの水平な伸び $\delta\mathbf{u}$ を測定し，バネの力 $\mathbf{f}$ と伸び $\delta\mathbf{u}$ の構成式が，$\mathbf{f} = k\delta\mathbf{u}$ なる関係にあると観測できたとする．一方，この変形状態を，最初の観測者とは右回りに回転 $\mathbf{Q}(t)$ だけ異なる観測者から見た場合，このバネの力 $\mathbf{f}$ と伸び $\delta\mathbf{u}$ は $\mathbf{f}^* = \mathbf{Q}\mathbf{f}$，$\delta\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\,\delta\mathbf{u}$ のように剛体回転したように観察される．構成式の客観性の原理は，構成式がこの相対的に異なる回転をしている観測者に無関係であるということを要請しているのであるから，$\mathbf{f}^* = k\delta\mathbf{u}^*$ が証明されれば良い．この式は，$\mathbf{f}^* = \mathbf{Q}\mathbf{f}$，$\delta\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\,\delta\mathbf{u}$ より，$\mathbf{Q}\mathbf{f} = k\mathbf{Q}\,\delta\mathbf{u}$ となる．$\mathbf{Q}$ は直交テンソルであるから，上式の両辺に $\mathbf{Q}^{-1}$ を掛けて，$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$，$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ を使うと，結局 $\mathbf{f} = k\delta\mathbf{u}$ となる．この式は最初の観測者が得たものと同じものであるから，$\mathbf{f}^* = k\delta\mathbf{u}^*$ が証明できたことになる．また，上記のように異なる観測者から見た物理量や構成式の関係は，図-4のように左回りに剛体回転だけ異なる2つの変形状態を考えるのと全く同じことである．したがって，上記と同様に考えれば，どちらの変形状態でも構成式は同一の関係，すなわち，水平な状態で $\mathbf{f} = k\delta\mathbf{u}$ とすると，剛体回転した状態でも $\mathbf{f}^* = k\delta\mathbf{u}^*$ となることが簡単に証明できる．このように構成式の客観性とは，一見当り前のことを言っているのであり，どんな物質の構成式でも必ず満足していなければならない基本的原理である．この例で，バネの変形として自由端の変位 $\mathbf{u}$ でなく伸び $\delta\mathbf{u}$ を考えたことに注意したい．図-4で，水平方向にあるバネに注目し，伸び $\delta\mathbf{u}$ の代わりにバネの自由端の変位 $\mathbf{u}$ を考えた場合の構成式　$\mathbf{f} = k\mathbf{u}$ は客観性を満たさず，そのような構成式を持つ物質はこの世に存在しないものとなる．このことは，変位 $\mathbf{u}$ は，伸び $\delta\mathbf{u}$ と異なり，$\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$ の関係にないため $\mathbf{f}^* = k\mathbf{u}^*$（$\mathbf{f}^*$ と $\mathbf{u}^*$ が平行）が成立しないことより物理的にも明白である（図-4参照）．

上記の例を一般的に考えるため，「互いに異なる運動をしている観測者」，言い換えれば「剛体運動だけ異なる変形状態」を考えるということを，変形状態にある物体内の位置ベクトルの関係で表すことを考える．基準状態 κ の物質中の任意の2点 $\mathbf{X}_0$ と $\mathbf{X}$ が，ある時刻 $t = t$ での変形状態で，それぞれ $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}$ に移動したとする（図-5）．それと剛体運動だけ異なる変形状態を考えたときは，$\mathbf{x}_0^*$，$\mathbf{x}^*$ に移動しているとすると，その2つの変形状態は剛体運動だけ異なるのであるから，どんな物質中の2点 $\mathbf{X}_0$ と $\mathbf{X}$ に対しても $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^* = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ の関係が成立している．ここで，$\mathbf{Q}(t)$ は，2つの変形状態の剛体回転の違いを意味する t のみの関数となる直交テンソルである．そこで，上式を変形して剛体運動だけ異なる変形状態の関係を，変形状態の物体内の位置ベクトル $\mathbf{x}^*$ と $\mathbf{x}$

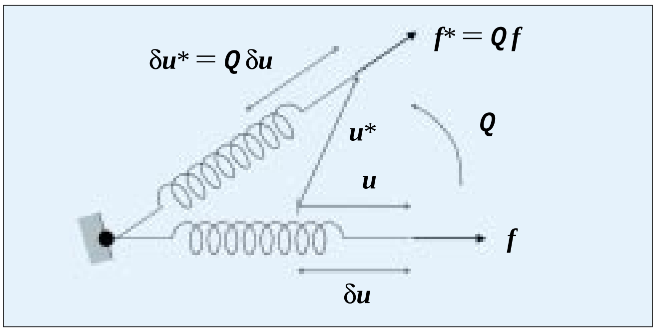


図-4　バネの構成式の客観性の原理

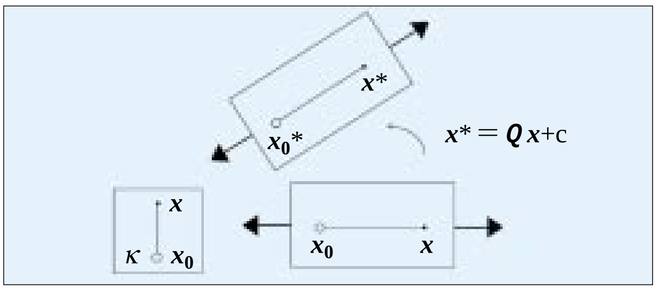


図-5　剛体運動だけ異なる変形状態の関係

で考えると，$x^* = Q(t)x + c(t)$ と書ける．ここで，x^* と x は，X と t の関数であり，$Q(t)$ は2つの変形状態の剛体回転の違いを意味する直交テンソル，$c(t) = x_0^* - Q(t)x_0$ は X_0 と t の関数であるベクトルである．

連続体力学に現れる物理量ないし幾何学量は，次の3種類のいずれかに属する．

① 客観量（Objective Fields）

剛体運動だけ異なる変形状態の関係 $x^* = Q(t)x + c(t)$に対して，スカラー，ベクトル，2階のテンソルの場合，それぞれ$\rho^* = \rho$，$t^* = Qt$，$T^* = QTQ^T$のように変換される量．すなわち，物体が剛体運動しても，物体自身（または物体と共に運動している人）から見た場合，全く同様に作用している，または，同様なものとみなせる量．例えば，密度ρ，表面力ベクトルt，バネの伸びδu，変形状態の物体表面上にある単位法線ベクトルn，コーシー応力テンソルT（∵Tの定義である$t = Tn$と$t^* = T^*n^*$，$t^* = Qt$，$n^* = Qn$を使うと，$Q^T T^* Q = T \quad \therefore T^* = QTQ^T$）等がある．なお，ここで構成式の客観性の原理と物理量が客観量であることは，全く異なることであることに注意したい．

②変形状態無依存量
（Invariant Fields for the Current Configuration）

剛体運動だけ異なる変形状態の関係 $x^* = Q(t)x + c(t)$に対して，その型が全く変わらない量（例：スカラーである物理量，基準状態の物体表面上にある単位法線ベクトルN）

③客観量・変形状態無依存量のどちらでもない量

（例：変位u，速度v，加速度a，客観量の物質時間微分で定義された量；例えば$\dot{T}$）

変形勾配テンソルF（$J = \det(F) > 0$）は，図-6のように剛体回転Rの後で変形Vさせるか，変形Uの後で剛体回転Rさせるかにより，$F = VR = RU$の2通りの分解ができる．これを極分解の定理と言う．ここで，V，Uは変形を表す正定値対称テンソルである．このとき，$B = V^2 = FF^T$，$C = U^2 = F^TF$を，それぞれ左および右コーシー・グリーンテンソルと呼ぶ．次に，紙面の都合で詳しく説明しないが，有限変形理論では基準状態に関係した応力としてよく使用される，非対称な第1ピオラ・キルヒホッフ応力$S = JTF^{-T}$，対称な第2ピオラ・キルヒホッフ応力$S_x = F^{-1}S = JF^{-1}TF^{-T}$がある．以上の説明中に使用した物理量のうち，その定義から簡単に証明できるが，V，Bらは，$V^* = QVQ^T$，$B^* = QBQ^T$となるので客観量であり，U，C，S_xらは変形状態無依存量である．またF，R，Sらは$F^* = QF$，$R^* = QR$，$S^* = QS$となるので客観量・変形状態無依存量のどちらでもない量である．また，速度勾配Lは，$L^* = QLQ^T + Q\ Q^T$となるので，その対称部分である変形速度Dは$D^* = QDQ^T$となる客観量であり，反対称部分であるスピン・テンソルWは$W^* = QWQ^T + Q\ Q^T$となるため，客観量・変形状態無依存量のどちらでもない量となる．

2）物質対称性の原理（Principle of Material Symmetry）

コーシー応力Tが，変形勾配履歴$F^t = \{F(t-s) : 0 \leq s < \infty\}$のみで定まる物質$T = f_\kappa(F^t)$を，単純物質（Simple Material）と呼ぶ．このとき，時間に無関係で均一な変形勾配Gの関係にある2つの基準状態κとκ^*を考える．図-7では，$G : \kappa \rightarrow \kappa^*$が90°の剛体回転の図が記してあるが，$G$は，特にことわりがない限り任意の均一変形で良い．このとき単純物質であれば，特定の変形勾配履歴が与えられたとき，κ^*から単にF^tを与えた場合と，κから変形勾配Gだけ変形させて異なる基準状態κ^*に移行してから，以後同一のF^tを与えた場合では，最終的な変形状態でのコーシー応力Tは，等しくなるので，$f_{\kappa^*}(F^t) = f_\kappa(F^tG)$は，どんな物質に対しても成立する．一方，2つの異なる基準状態κ，κ^*から全く等しい変形履歴F^tを与えたとき，最終的な変形状態でのコーシー応力Tが同一であった場合，すなわち，$T = f_\kappa(F^t) = f_{\kappa^*}(F^t)$であった場合，上記結果を使うと$f_\kappa(F^t) = f_\kappa(F^tG)$が成立する．この基準状態の変形勾配$G$の集合は群をつくるが，これをその物質の対称群$\mathfrak{g}_\kappa$という（群とは，数学用語でグループ（group）のことであり，ここでは，ある同じ変形特性を持ったものの集合と考えてさしつかえない）．$\mathfrak{g}_\kappa$は，採用した基準状態によって異なるので，添え字κが付けられている．$\mathfrak{g}_\kappa$はユニモジュラ群$\mathcal{U} =$

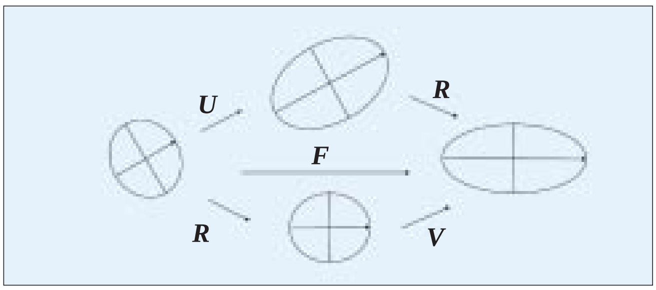


図-6　変形勾配の極分解

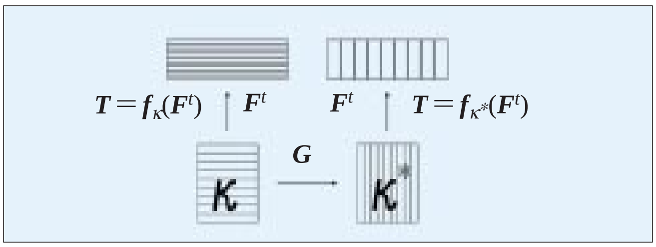


図-7　異なる基準状態に同一変形履歴を与えたときのコーシー応力

$\{\boldsymbol{G} : |\det(\boldsymbol{G})| = 1\}$（体積変化のないすべての変形勾配の集合）の部分群であることが証明できる．1950 年代の後半，ノル（W.Noll）は，単純物質において，この対称群を使って物質の現象論的分類を行った．

①**流体** $g_\kappa = \mathcal{U}$：すなわち体積変化に違いのない限り，どんな基準状態をとってもコーシー応力は同じになる．したがって，流体の構成式におけるコーシー応力は，密度 ρ と，基準状態とは無関係な変形履歴の関数になる．流体は，方円の器に従う数学的表現であり，人間が流体の上をゆっくりと歩けない理由はこのためである．

②**固体** $g_\kappa \subseteq \mathcal{O}$：ここで $\mathcal{O}$ はすべての直交テンソルのなす群であり，直交群と呼ばれている．すなわち，剛体運動を除くすべての形状変化に対し，応力が発生する．人間が固体の上を歩ける理由はこのためである．$g_\kappa = \mathcal{O}$ となる κ が存在する場合を等方物質と呼び，どのような κ に対しても $g_\kappa \subset \mathcal{O}$ の場合を異方物質と呼ぶ．ここで，g が基準状態 κ に依存していることに注意したい．例えば，ある基準状態 κ_0 をとったとき，$g_{\kappa 0} = \mathcal{O}$ となり等方物質であった場合，基準状態 κ_0 のどんな剛体回転を行っても同じ変形が与えられたとき，コーシー応力は同じになるが，状態 κ_0 を相似変形以外の変形させた状態を基準状態にすると，もはや等方性は失われる．その意味で，この基準状態 κ_0 を形状無変化状態（undistorted state）と言う．また，$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ より，流体はすべて等方物質である．

③**液晶** $g_\kappa \subseteq \mathcal{O}$，$g_\kappa \supseteq \mathcal{O}$ のいずれも成立しないもの：すなわち，ある方向には流体的挙動するが他の方向には，固体的挙動するもの．

なお，上記分類は現象論的な分類であり，物質構造論的な分類とは異なる．また，構成式用語である粘性流体や固体の弾性体，弾塑性体，粘弾性体などの用語は，現実の物質に付けられた名前ではなく，物理ないし工学者が連続体力学を適用しようとしたとき，その応用の時間・空間スケールを考慮して，適切に使用されるべき用語である．「ゴムは弾性体，粘土は弾塑性体である」という言い方は，好ましくない．

構成式の客観性と対称性の応用

以下，コーシー応力 $\boldsymbol{T}$ が，現時刻の変形勾配 $\boldsymbol{F}$ だけで決まる弾性体 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}_\kappa(\boldsymbol{F})$ のうち，等方物質である弾性体を考える．その場合，コーシー応力 $\boldsymbol{T}$ は，形状無変化状態の剛体回転だけ異なる基準状態を考えれば良いので，以後基準状態の違いを表す添え字 κ を省略する．そのとき，コーシー応力 $\boldsymbol{T}$ は，いかなる変形勾配 $\boldsymbol{F}$，かつ基準状態の違いを表す全直交テンソル $\boldsymbol{G}$ に対して，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{FG})$ を満たす必要がある．ここで，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{VR}$，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T$ を代入すると，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V})$ となる．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{FF}^T = \boldsymbol{V}^2$ だから，弾性体を ①$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{B})$ と仮定できる．このとき，$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{FG}$ に変化しても，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{FF}^T$ は，変化しない，したがって，等方性の条件は自動的に満たされている．次に，構成式の客観性の要請より，$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{B}^*)$ が成立する必要がある．このことは，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{B}$ は客観量であるから，どんな直交テンソル $\boldsymbol{Q}$，正定値対称テンソル $\boldsymbol{B}$ に対しても，$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{QBQ}^T)$ を満たす等方テンソル値関数になることが要求される．したがって，$\boldsymbol{f}$ が客観性と等方性を満たす最も一般的な表現式は，式（1）において，$\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{B}$ に変えた表現式となることが必要十分条件である（式（1）が，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D})\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{QDQ}^T)$ すなわち等方テンソル値関数であることを証明するのは簡単である．逆の証明は数学者にまかせよ）．実は，固体に関するこの表現式も M.ライナーが 1948 年に発表している．

第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力は $\boldsymbol{S}_x = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}$，右コーシー・グリーンテンソルも $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ で定義されているから，②$\boldsymbol{S}_x = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{C})$ も弾性体である．この場合，$\boldsymbol{S}_x$，$\boldsymbol{C}$ とも変形状態無依存量であるので，構成式の客観性は自動的に満たされている．この例のように，構成式が客観性の原理を満たすために客観量を用いる必要はない．次に，等方性の要請より，$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{FG}$ に変化すると，その定義より $\boldsymbol{S}_x$，$\boldsymbol{C}$ はそれぞれ $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{CG}$ に変化するから，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}^T$ と置くと，$\boldsymbol{f}$ と同様に $\boldsymbol{h}$ は，どんな直交テンソル $\boldsymbol{Q}$，正定値対称テンソル $\boldsymbol{C}$ に対しても $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{QCQ}^T)$ を満たす等方テンソル値関数になることが要求される．したがって，$\boldsymbol{h}$ が客観性と等方性を満たす最も一般的な表現式は，式（1）において，$\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ $\boldsymbol{S}_x$，と $\boldsymbol{C}$ に置き換えた表現式になることが必要十分条件である．

次に，第 1 ピオラ・キルヒホッフ応力は $\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}$ で定義されているから，③$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})$ も弾性体である．まず，構成式の客観性の要求より，$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}^*)$ が成立する必要がある．ゆえに，どんな直交テンソル $\boldsymbol{Q}$，変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ に対しても，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{QF})$ を満たすことが要求される．また，等方性の要請により，$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{FG}$ に変化すると，その定義より $\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{SG}$ に変化するから，どんな直交テンソル $\boldsymbol{Q}$，変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ に対しても $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{FQ})$ を満たすことが要求される．この場合は，構成式の客観性と等方性の両方を満たす $\boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{F}$ による一般的な表現式は，式（1）のような等方テンソル値関数にはならない．例えば，どんな表現式になるか

は，$T = f(B)$ の一般式より $S = g(F)$ の表現式を求めてみればよい．客観性と等方性を満たす最も一般的な非線形等方弾性体の表現式が式（1）で D を B におき変えた，簡単な式になったのは，客観量のみを使った ① では客観性の要請であり，変形状態無依存量のみを使った ② では等方性の要請であることに注意．

1845 年，ストークスが提案した粘性流体の構成式を，1868 年ブーシネスクがさらに一般的に提案したように，コーシー応力 T が，D 以外に，スピン・テンソル W にも依存すると仮定した $T = -P(\rho)\mathbf{1} + f(\rho, D, W)$ を考える．このように仮定した流体は，前に定義した流体の特別な場合であり，密度 ρ が同一である限り基準状態に依存しないから，等方性物質である．この時，客観性の要請は，$Qf(\rho, D, W)Q^T = f(\rho, QDQ^T, QWQ^T + \dot{Q}Q^T)$ となるから，$Q = \mathbf{1}$，$\dot{Q} \neq 0$ と置けば，f は W と無関係でなければならないことがわかり，結局 f は D の等方関数であることが証明でき，その一般型は，密度 ρ を除けば，1945 年，ライナーが発表した式（1）になる．「流体力学」と題した著名なほとんどの著書には，ストークスが提案した粘性流体の一般的な構成式において考えた流体が「等方性」であると仮定して式（1）を記述している．しかし，式（1）のような等方テンソル関数となったのは等方性の仮定ではなく，どんな物質でも満たす必要がある「構成式の客観性」の要請の結果であることに注意したい．等方性の仮定は，上式のように，構成式の変数を ρ，D，W に仮定した時点で，すでに満たされてしまっている．前節で述べたノル（Noll）による物質の分類では，流体はすべて等方性である．

21 世紀の非線形連続体力学

われわれ人間は，各人が超高速演算，超膨大な記憶力，超天才的学習能力さえ持つ「コンピュータ」という，まだまだ飛躍的な進歩が期待できる「もうひとつの頭脳」を手に入れた．非線形連続体力学は，土木工学における種々の複雑な力学現象の解明には，非常に有用な学問である．もうひとつの頭脳を手に入れた 21 世紀を生きるわれわれには，十分に挑戦可能な，無限に広がる未知の世界に遭遇できる興味深い分野に発展していくと著者は確信をもっている．

有理力学という言葉は一時の花

最後に，著者は幸いにして，若いとき，コンピュータ・サイエンスや非線形連続体力学でも著名なカーネギー・メロン大学数学科で W. Noll，B. D. Coleman，M. E. Gurtin 教授らと研究を共にすることができた，また，帰国してからも元京都大学工学部教授・故徳岡辰雄先生と 10 年以上も研究を共にできた．

1960 年代，この非線形力学の分野を米国の C. Truesdell が Rational Mechanics という言葉を好んで使い，それを主題とした Archive for Rational Mechanics and Analysis というジャーナルをフランスの応用数学者 J.L.Lions と共に編集長となり発刊した．その後しばらくは，世界中の応用数学・力学者は，Rational Mechanics という言葉を好んで使い，それはまるで，それまでの連続体力学とは違う公理主義的な数学の 1 分野であると錯覚させるほどに流行してしまった．故徳岡先生もそのような信念を持っておられた．そのせいか，上記英語名をそのまま「有理力学」と訳され（中国でも同名な訳語がされている），先生が日本語で書かれた論文・解説には，「有理力学」とは，それまでの連続体力学とは違う数学の 1 分野であるということを力説された．そのため，日本でも古典的な連続体力学の研究者からは，「有理力学」（Rational Mechanics）は，あたかも，それまでの連続体力学とは違う，役に立たない数学的なものであるという誤解を招いてしまったと著者は苦笑している．「有理力学」（Rational Mechanics）の逆は，「無理力学」（Irrational Mechanics）である．理屈のない力学などあり得ない．本文でも紹介したように，非線形構成式が本格的に研究されるようになった 1945 年以降，特に，客観性の原理や物質対称性の原理に関し，しばらく混乱の時代が続いたため，それをきれいな形で整理し，証明を与えたのが著名な W. Noll の Ph.D. 論文であった．これが，先の Archive for Rational Mechanics and Analysis 初刊の主論文となった．第 2 編「応用力学のエッセンス」にも似たような言葉で記述してあるように，著者は，「有理力学」（Rational Mechanics）とは，1950 年代後半からその理論が発展してきた非線形連続体力学のことであり，単にそれまでの連続体力学の Advanced Mechanics に過ぎないと思っている．現に，最近では，Rational Mechanics という言語はほとんど死語となっており，著書の題名には，「連続体力学」（Continuum Mechanics）または「非線形連続体力学」（Non-linear Continuum Mechanics）を用いるのが常識となっている．

参考文献

1 ー"THE UNKNOWN REONARDO", A MacGraw-Hill Co-Prodiction, MacGraw-Hill Book Co. Maidenhead, England, 1974（訳本）「知られざるレオナルド」，岩波書店，1975

応用数学のエッセンス
－力学，数学そしてそれらの教育に関連して－

田村　武　Takeshi TAMURA
フェロー会員　工博
京都大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻土木基礎情報学講座

数学の勉強

小学校の算数に始まり，高校あるいは大学の高等数学まで，技術者はとても長い期間をかけて数学を勉強していることになる．何を目的に数学を学ぶのかといえば，高校までは主として進学の手段であり，大学では卒業の単位取得であろう．むろん，小学校でも算数に魅力を感じる子供もいるだろうが，大学生まで含めて大半は勉強させられているというのが実態である．学生の「理工系離れ」が目立つ昨今，その一つの理由は「数学離れ」にあると思われる．ここでは応用数学と力学の関係を念頭に置きながら，大学の数学に限定してその周辺の議論を展開する．

大学の理工系学部に入学すると，まず，微分積分学と線形代数学を学ぶ．筆者の経験から言えば，前者がべらぼうに難しい．高校までの数学に自信がある者でも，「εとδ」による論理展開はまるで禅問答のように感じられる．「任意の小さなεに対して，十分小さなδをとれば...（中略）... となるとき，その関数は連続という」と言われても，初学者には何のことかさっぱりわからない．「関数の連続とは，そのグラフがつながっていることである」となぜいってくれないのか，と苦悩するものである．確かに，後者でもいいような気がするが，図-1 に示す$y = x \sin(1/x)$ の原点周辺の挙動のように「グラフがつながっている」かどうか不明な関数を見れば，やはり禅問答の有用性が理解できるし，これ以外の方法はなかなか見当たらないこともわかる．だから，役に立つ応用数学のみならず，役に立たないと思える数学の基礎もそれなりに意味があるのである．

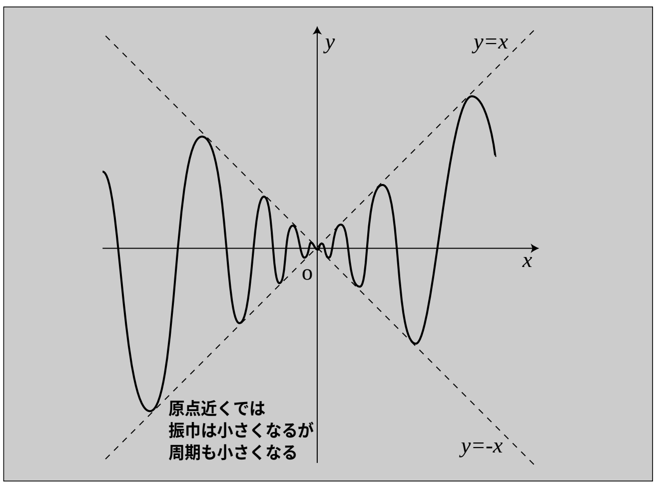


図-1　$y = x \sin(1/x)$

数学に限らず，勉強の動機は，「必要性」，「向上心」，「優越感」あるいは「好奇心」である．どれから出発してもいいが，最終的に好奇心にたどり着くのが健全な態度である．大学で学ぶ数学に好奇心を持つまで至らないうちに挫折する学生があまりにも多すぎる（これは数学教師の講義方法の影響がとても大きい）．

工学教育と数学

工学は実学であり，実社会と強いつながりがある．少し昔の技術者は職人であり，徒弟制度の下で技術が伝承されてきた．そこには工学の学問体系などはなく，ノウハウの塊として親方から弟子に技術が伝えられた．いかに効率的に，かつ，正確にモノを作るかが最重要課題であり，その背景にある理屈はごく限られた一部の人間だけが知っていれば良かった．個々の問題に当たって，早く正確に解ける訓練を中心とする教育である．それも一つの能力として評価されるべきであるが，それに偏ることは，現代では大きな弊害をもたらす．いわゆるマニュアルエンジニアを生み出すことになる．

より一般的な高い立場から現象を記述しようと思うと，どうしても数学を用いざるを得ない．とくにそこには大学の数学が必要なのである．ところが，土木工学における代表的な力学科目である構造力学の講義において，いまなお，「なるべく数学を使わない方法」が駆使されている．古色蒼然たる図式解法を天下り式に教えていては，学生に構造力学にさえ好奇心を持たせることは不可能である．無論，講義の方法は多種多様であってしかるべきである．一般論から各論へ，あるいは，個々の例題から一般論へ，あるいはその中間など，どのような手法を採用するかは，教師と学生の関係で決めるべきことである．しかし，各論や例題に終始すべきではない．大学での講義では，必ず数学で表現した一般化がなければならない．そうでなければ中世の徒弟制度と何も変わらない．

数学と力学

大学の数学というと，何かとても高級で難しいものを

想像しがちである．これも日本の数学者の悪い影響である．彼らは，生まれながらに数学に好奇心を持っている「天才＝普通でない人」である．しかし，こけおどしの部分も少なからずある．「もう少し簡単に言えば，すぐわかる」ことをもったいぶって言う癖を持っている．大学あるいは大学院での力学に限れば，それほど広い数学の学習は不要である．端的に言えば，大学 1，2 年生の数学で技術者としての生涯が保証される．個々の特別な問題を解こうとすれば，それなりの詳しい数学が必要かもしれないが，力学の講義をフォローするだけならば，少しの内容で十分である．逆に言えば，1，2 年生の数学というのは「結構イケテル」のである．ではなぜ，力学を学ぶのに数学が必要なのか．その答えは，「力学を語る言語は数学である」ということである．計算機に仕事をさせる場合，FORTRAN などの言語を使うが，力学に何かをさせるとき，数学を言語として使うのである．FORTRAN が簡単であるように，力学の枠組みを知るための数学はほんの少しで十分である．具体的には，線形代数とベクトル解析の初歩である．以下にその例をいくつかあげる．

（1）連立 1 次方程式

中学生で始める連立 1 次方程式の一般理論は，大学 1 年生で完結する．すなわち，「方程式と未知数の数が一致しない連立方程式」の理論と解法で完結する．このような連立 1 次方程式は高校生には解けない（大半の大学生，一部の研究者も解けない！）．「こんなこと知らなくても，構造力学はわかる」という人は，ほんとうは構造力学を理解していない人である．具体的に言えば，図-2 のような不静定トラスの適合条件の導出は，まさにこの理論を用いている．でも，多くの人は気が付いていない．単に，「仮想仕事の原理」や「Castigliano の定理」という「業界用語」がわかったような気にさせているだけである．「仕事」「エネルギー」という概念は重要であるが，これは数学で導かれた結果を力学的に解釈する道具であって，結果を導く手段ではない．ましてや「自然界にはエネルギーを最小にする普遍の法則があるのだ」と言って宗教的誘導を学生に強制すれば，これはもう憲法違反である．だから，このような用語はいったん教育の現場から廃棄すべきである（これらは，研究者が理論を展開する指針としてこっそり使うべき程度のものである）．トラスのつりあい方程式が導けて，節点変位から部材の伸びが計算でき，背景に線形代数がわかっていれば，トラスの力学はほとんど確実に掌中のものとなる．

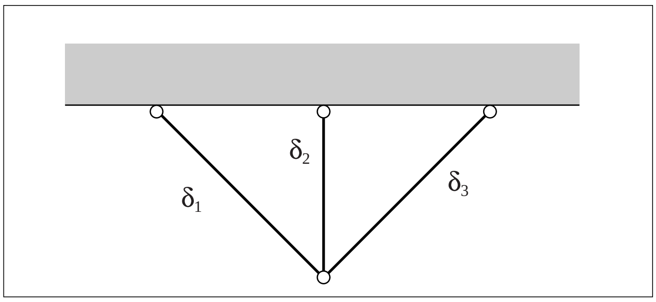


図-2　部材の伸び

（2）固有値問題

（対称行列の）固有値問題は，連立方程式の理論と共に線形代数学の両輪である．この固有値問題がカバーする力学の分野はとても広範であり，かつ，基本的である．（2 次元の）モールの応力円を理解するためにも，固有値問題は必須である．すなわち，力のモーメントのつりあい式から，まず，一般の応力行列（テンソル）が対称であることがわかり，そのうえで固有値問題の理論を通して，せん断応力の作用しない二つの直交する主応力面の存在が保証される．決して初めから主応力面が存在すると仮定することは許されない．言うまでもなく応力行列の対称性がモールの応力円から導かれるのではない．固有値問題の理論を用いなくても，同等の結果を計算によって示すことは不可能ではないが，これでは事の本質は何も見えてこない．せっかく，線形代数学で固有値問題を学習しているのに，それを避けることはないであろう．

さらに言えば，固有値問題のエッセンスは，定数項がゼロであるような連立方程式の非自明解の存在定理である．これが認識できれば，Terzaghi の圧密方程式を Fourier 級数で解く場合，それが固有値問題と深く関わっていることも自然と理解される．固有値問題は，行列の理論よりもっと広い守備範囲を持っている．

（3）部分積分公式と転置行列

部分積分公式は高校生でも知っている．微分する関数を入れ替えるだけの公式であるが，でもこれはかなり奥の深い内容を含んでいる．微分や積分を用いず，代数的に最も簡単に部分積分公式の本質を書けば

$$a_1 (b_2 - b_1) + a_2(b_3 - b_2) + a_3 (b_4 - b_3)$$
$$= - a_1 b_1 - b_2(a_2 - a_1) - b_3 (a_3 - a_2) + a_3 b_4$$

なる恒等式である．2 項の差をとっているのが，左辺では b 系列であり，右辺では a 系列に替わっている．図-3 のような直線 3 本ばねを考えたとき，上式が仮想仕事の

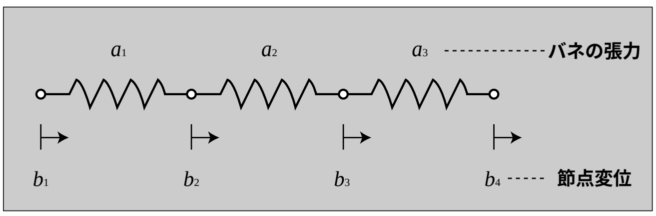


図-3　3 本ばねモデル

原理の証明になっていることがわかる．つまり，仮想仕事の原理は力学の原理ではなく，むしろほとんど数学の恒等式であると言った方が良いことになる．すなわち，上の恒等式を力学的に解釈すれば仮想仕事の原理となる．逆に言えば，仮想仕事の原理を力学的直感で理解できる人は，上の恒等式を力学的直感で認めることができる（奇妙な）人である．

2つのベクトル $\boldsymbol{x}=(a_1, a_2, a_3)^T$，$\boldsymbol{y}=(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ と，行列

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，線形代数学の重要な恒等式

$$\boldsymbol{x}\cdot A\,\boldsymbol{y}=A^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

が，先述の恒等式と同一になることがわかる．ここで T は行列の転置を，・はベクトルの内積を表わす．このように行列をうまく用いると，力学と数学を密接につなぐことができる．しかも，簡単な系でも，複雑な系でも行列を使うと同じ式で表現することが可能となる．数学を用いることは難しくすることではなく，表現を簡潔にしてくれる．数学は横着でずぼらな人の強い味方である．

(4) Lagrange（ラグランジェではなくラグランジュ）乗数法

これは大学1年生の終わり頃に微分積分学で習うことになっている．これを簡単に説明する．「制約条件 $g\,(x,y)=c$ のもとで，関数 $f\,(x,y)$ を最大（最小）にせよ」という問題が与えられたとき，新たな関数（Lagrangian）

$$L\,(x,y,\lambda)=f\,(x,y)-\lambda\,\{g\,(x,y)-c\}$$

を定義し，これを x および y で微分したものをゼロと置き，制約条件 $g\,(x,y)=c$ と共に連立して x，y，λ を解けば良いという方法である．この λ を Lagrange 乗数という．これも天下り式に教えられると納得できなくなる．見掛けは簡単だけれど，なぜこのような方法がうまく機能するのかがわからない．困ったことに力学でこの手法を使うことが多い．地盤工学で言えば，非排水条件にかかる Lagrange 乗数は，実は過剰間隙水圧に相当する．つまり，制約条件を保持するための拘束力としての意味が Lagrange 乗数に与えられる．経済学の分野では Lagrange 乗数に“shadow price”という意味も与えられる．このようなからくりを理解するにもやはり数学が必要である．ここでは詳しく述べないが，これも（1）で述べた連立1次方程式の理論や図-2のトラスの適合条件と大いに関連している．

力学的推論と数学的推論

力学を勉強したり研究する場合，頭の中では力学的推論と数学的推論を用いる．両方を利用できないと力学は理解できない．決して力学は数学の部分集合ではないし，数学は力学の奴隷でもない．力のつりあい条件や運動方程式は，いくら数学を勉強してもわからないし，力学を勉強しても加法定理は出てこない．しかし，力学の現象が数学を用いて表わされるように，数学の公式を力学的に解釈することはできる．その最たるものの一つが「仮想仕事の原理」である．「つりあっている物体になされる仮想外力仕事は，仮想内部仕事に等しい」と表現されるこの「原理」は，一見，力学的直感に受け入れられやすい．しかし「仮想仕事は物体内部に貯えられるのである」と言い放って仮想仕事の原理を証明したことにすれば，学生はキツネにつままれた状態（キツまま状態？！）になる．

以上のようなことと関連して注意すべきは，力学を前にするとき，自分がいま「力学的思考をしている」のか「数学的思考をしている」のかをはっきりさせることである．特に学生に講義する場合，それを明確にしてあげることが大事である．例えば，ガウスの発散定理を力学的に解釈することはできても，証明することはできない．力学的解釈も重要ではあるが，解釈ばかりで説明しても証明にはならないのである．力学の論理の糸は，「力学的考察」と「数学的考察」が直列的につながったものであり，両者は交換不可能である．すなわち，数学的知識の不足を力学的知識ではカバーできない．逆に，力学的知識の不足を数学的知識ではカバーできない．たとえば連続体でいえば，ガウスの発散定理を知らなければ，仮想仕事の原理を証明できないのである．これを力学的知識で補おうとして，力学的解釈で置き換えることは許されない．

力学を学ぶと，論理の大半が数学で覆われていることに気づく．要所要所に力学的思考が出てくるが，ほとんどの部分では数学的思考が力学の水面下の論理を支配している．少し経験を積むと，数学的考察で導かれた式が正しいか誤っているか，力学的直感で判断できるが，これは誘導とは異なる．学生にはまず，正しい誘導を示してから，もし時間があればその力学的解釈を教えれば良い．ところでしばしば，数学的に導かれた結果が自分の力学的直感と矛盾する場合がある．単純な矛盾でもこの乖離は最も好奇心を呼ぶところであって，これを解決したときに大きな飛躍が生まれることがある．これこそ応用数学のエッセンスであろう．

計算力学のエッセンス
有限要素法を中心として

寺田賢二郎 Kenjiro TERADA
正会員 Ph. D
東北大学大学院助教授 情報科学研究科人間社会情報科学専攻

「計算力学（Computational Mechanics）」，耳慣れない言葉であろう．計算を伴わない力学問題などないし，高性能の情報機器が簡単に手に入る現況では，面倒な計算は計算機に任せれば良いことなど誰でも考えつく．なぜことさら“計算力学”と呼ばねばならないのか．本稿では，代表的な解析手法の一つである有限要素法の技術的解説を通して，この計算力学のエッセンスの抽出を試みる．

計算力学の構成要素

図-1の左側に示す2つの構造物を見て頂きたい．いま，これらが外荷重を受けたときにどれだけ変形するのか，あるいは壊れずに済むのかといった問いに対して，右図のようなモデル化を行い，力学問題として設定する．このとき，現象を記述する「力学」と数理問題として意味付ける「数学」が用いられ，この問いに答えるには力学的な変数を用いた数式を「解く」，すなわち「計算する」ことが要求される．構造（a）に対しての「計算する」とは，古典的なはり理論を適用して，主に手計算で断面力等を求めることであろうし，構造（b）の場合は，手計算はおろか厳密に解くことさえできないため，計算機（デジタルコンピュータ）を利用して近似的に答えを探すことであろう．しかし，いずれの場合でも，「手」や「計算機」は「計算する」行為を実現するデバイス（装置）に過ぎず，それを可能にする主役は，数理的な理論展開と計算技術などの科学的“道具（ツール）”に他ならない．

文明の発達とともに，人工物（構造物）には優れた機能と精密さ，高い安全性が求められ，資本主義経済の発展とともにその設計・解析・製造には生産性・経済性が要求されるようになった．必然，従来の理論あるいは実験的アプローチだけでは解決し得ない力学問題に遭遇すれば，それを解決するための策を講じねばならない．幸い，デバイスとしての計算機は，われわれの能力をはるかに越える数値演算能力を備えているため，それを最大限に利用した道具（＝計算理論や技術）の実用を視野に入れた開発が期待される．「計算力学」とは，そのような成果物から構成される学問体系であり，「力学（物理）的な諸問題を解決するための計算技術および理論」を指

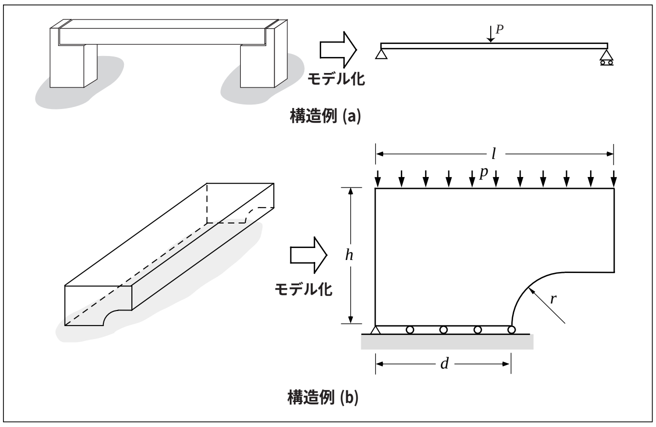


図-1　解析における構造例とそのモデル化

すものなのである．

計算力学が提供する道具の中で，上の例のような力学（物理）問題を解くことを目的に開発されたものを“解析手法”と呼ぶ．代表的な解析手法としては「有限要素法」，「境界要素法」，「差分法」などが挙げられるが，これら以外にも個別要素法，有限体積法，メッシュレス法など，目的に応じて多くの解析手法が開発されている．また，これらに利用される種々の数値計算法（例えば数値積分・微分，連立一次方程式解法など）や最適化アルゴリズム，並列計算法などの個別の理論や技術も計算力学の重要な構成要素である．更に近年では，解析モデル自動生成法や解析結果の可視化などの周辺技術も，人工物の設計・解析・製造を念頭に置いた計算機支援工学（Computer-Aided Engineering; CAE）の名の下に計算力学（計算工学）の一部とされることがある．中でも「有限要素法」は，これらさまざまな計算技術と深く関わっており，実際的な科学技術計算においても中心的役割を担っているため，計算力学のエッセンスを抽出するには格好の題材であろう．

計算力学の方法

計算力学の基本姿勢は，工学に関わるさまざまな現象を，人間が理解し得る言葉で翻訳（モデル化）し，計算機が判別し得る「有限個の具体的数値」で模擬（近似）することである．それゆえ，得られる答えには，真実から遊離したある種の嘘が含まれる．技術者は，この翻訳や模擬の仕方を知っていれば，嘘がどこにあるのかを見

極めやすいはずである．以下，このことを念頭に置いて，計算力学における道具（主に解析手法）が有する共通の考え方について概説する．

物理的現象には，その挙動を数学的に記述する方程式（支配方程式）が存在する．一般にそれはいくつかの微分方程式と境界条件で与えられ（境界値問題），構造内のいたるところで（無限個の点で）成立すべきものである．この支配方程式を満たす関数が問題の解であるが，一般にこれを手計算で求めることは不可能とされる．これに対して，計算力学が提供する各種解析手法は，支配方程式を有限個の未知数からなる代数方程式（連立一次方程式）に置き換えて「近似的に」解を求めるものである．代表的な解析手法である有限要素法を例に取ると，その手続きは，以下のように整理される（図-2 参照）．

(1)任意の対象領域を小領域（有限要素＝finite element）に分割する［前処理（pre-process）］＝メッシュ分割（図-2 (a), (b)）

(2)その一つ一つの要素に対して，解の分布を規定する近似関数を導入し，その係数を未知変数とする代数方程式を立てる（図-2 (c)）

(4)全体構造で成り立つべき代数方程式を組み立てる［アセンブリング（assembling）］

(5)荷重・支持条件等を付加する

(6)全未知係数を得る［連立方程式を解く（solve）］

(7)得られた係数と (2) で導入した関数を利用して付加的な計算を行い，図化等を行う［後処理（post-process）］（図-2 (e),(d)）

こうして図-1 の構造 (a) に対して手計算で得るものと同程度の情報が，構造 (b) についても「近似的に」得られるのである．有限要素法に限らず，計算力学を構成する各種技術は，その信頼性と汎用性を追求しつつ，上記(1)～(7)のほとんどの作業を計算機上で効率的に行うことを目的に考案されている．紙面の都合上，これらの技術の詳細を紹介することはできないが，以下では“有限要素法という道具”に限定した解説を与え，計算力学が備え持つ，「力学」でも古典的な「数学」でもない技術的側面の重要性を例示することにする．

有限要素法の考え方と特性

「有限要素法（Finite Element Method; FEM）」は，その誕生から半世紀が経とうとしているが，今もなお技術的発展を続けている．今日では，構造解析や流れ解析だけでなく，熱，電磁場，音などさまざまな問題に対しても適用され，市販の汎用ソフトウェアの登場で誰にでも利用可能になっている．また，徐々に解析の自動化が図られ便利になる反面，ソフトウェアとしてのブラックボックス化が進み，解析者がさほど力学などの物理や有限要素法の知識がなくてもそれなりの結果が得られるようになってきている．したがって，いかに適切にモデル化して数値解析を実行するか，得られる結果をどう判断するかが解析者には求められることになる．以下に述べる「有限要素法の解の特性」に関する事項は，後者の立場から利用する側の技術的基礎知識の例として認識されたい．

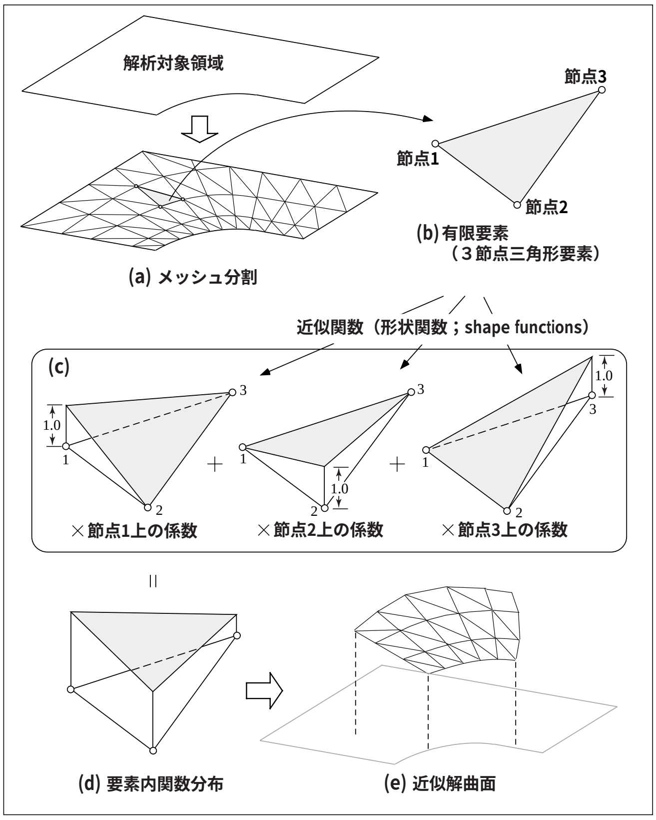


図-2　有限要素法における解（曲面）の近似

図-2 (c) に示すような関数の組を有限要素内に設定する．この関数は要素の形状を定義する点（節点と呼ぶ）で 1 をとり，他の節点上では 0 になるように分布している．この関数（形状関数と呼ばれる）の係数として，節点上で近似したい関数そのものの値を考えれば，「係数」×「形状関数」のすべての組によって要素内部での図-2 (d) のような関数分布を得るはずである（内挿という）．

ただし，実際の「係数」は“未知”であるので，“一要素について成り立つ”ように変換された支配方程式に代入することで，この未知係数に関する代数方程式を導く．全要素について同様の操作を施し，すべてを重ね合わせることで全体的な代数方程式が得られ，これを解くとすべての節点上での解の値が近似的に求められる仕組

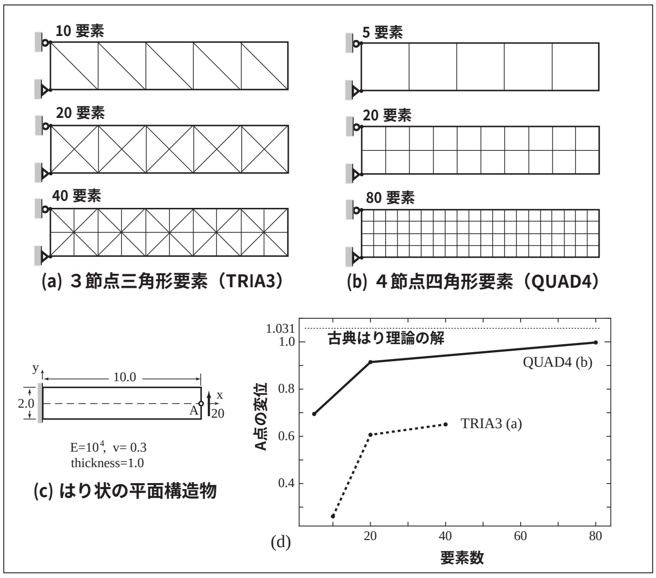


図-3　要素の種類および数に応じて異なる有限要素法の解

みになっている．これを用いて解全体を表現すると，図-2 (e) に示すように，真の解はあたかも有限個の曲面によって多面体のごとく近似されることが想像される．また，要素を増やせば，節点も増え，多面体は滑らかな真の解に近づくことも期待される．簡単ではあるが，これが有限要素法の近似の基本的な考え方である．この理論的枠組みについての詳しい解説は割愛するが，以下の点に注意しよう．

1）分割を細かくすればするほど近似解は厳密解に近づくこと
2）有限要素法の与える解は一般に“剛”なこと
3）要素とそこに与える近似関数の分布形は，勝手に仮定されたものであること
4）微分方程式（支配方程式）の形式が，領域内に存在する無限個の“点”ではなく，たかだか有限個しか存在しない各“要素”について成り立つようなものであること

以上を概念的にでも理解すれば，得られる解についての工学的判断が容易になる．有限要素法の近似の考え方に起因する特性で重要なものは 3）と 4）であるが，直感的に理解しやすい 1）と 2）から先に解説する．

図-3 は，はり状の平面構造物 (c) に対する解析において，用いる要素数と有限要素法の近似解の関係を示している．古典はり理論が正解を与えるものとすると，要素を増やすほど近似解はその正解値に近づく様子がわかる．また，その収束過程で，変形は常に正解よりも小さい．つまり，概して有限要素法は，構造物を実際よりも「硬め（剛）に」評価し，要素の数が増すとより正解に近い「軟らかい」答えを与える．

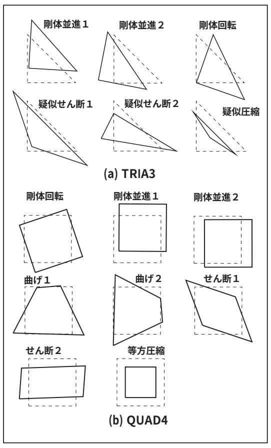


図-4　TRIA3 と QUAD4 の基本変形

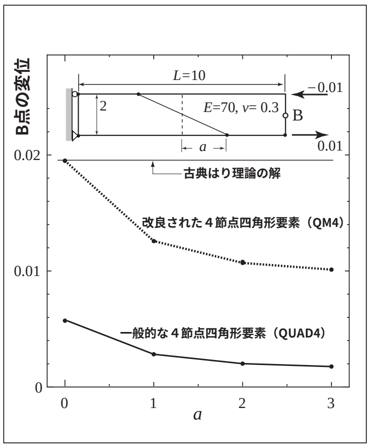


図-5　要素のゆがみと精度

さらにこの例で，(a) の並びは三角形，(b) は四角形という 2 種類の要素を用いて比較していることに注意して頂きたい．(a) の並びには図-2 で模式的に示したものと同じ 3 節点三角形要素（TRIA3）が用いられているが，(b) には 4 つの節点（そして 4 つずつの近似関数と係数の組）を持つ四辺形要素（QUAD4）が採用されている．図からわかるように，三角形の要素ははるかに悪い（剛な）答えを与えている．つまり，要素には「性能」があるのである．

この要素の「性能」は，まさに特性の 3）と密接に関わることである．次の例で更に詳しく見てみよう．図-4 には，図-3 で用いた TRIA3 と QUAD4 の要素の「基本変形」が示されている．この基本変形とは，要素が本来持ち合わせている，いわば「変形の座標軸」であり，おのおのに成分を与えてすべてを足し合わせることで，実際の変形を再現することができる．軸が多いほど表現能力が高いことは容易に想像される．TRIA3 は，明らかに QUAD4 よりもこの「軸」が少ない．つまり，TRIA3 は変形を表現する「次元」が QUAD4 よりも低く，これが先の要素の性能の差に現れるのである．

さらに，同じ四辺形要素にも要素の性能には違いがある．図-5 を見て頂きたい．先ほどと同様はり状の平面構造に二つの四辺形要素を用いて，要素の“ゆがみ”具合（図中の a の大きさ）と有限要素法の近似解の関係を与えている．まず，ゆがみのない状態（$a=0$）を見てみる．はりの理論解との比較から，先例でも用いた最も標準的な要素の一つとして知られる QUAD4 は，曲げの変形に対して極めて剛な（つまり，近似が悪い）ことがわかる．しかし，この要素の基本変形を元に近似関数に少々修正を加えることで，$a=0$ においてこの問題の厳密解を与える要素（QM4）を得ることができる．ただし，いずれの要素もゆがむほどに正解から遠ざかること

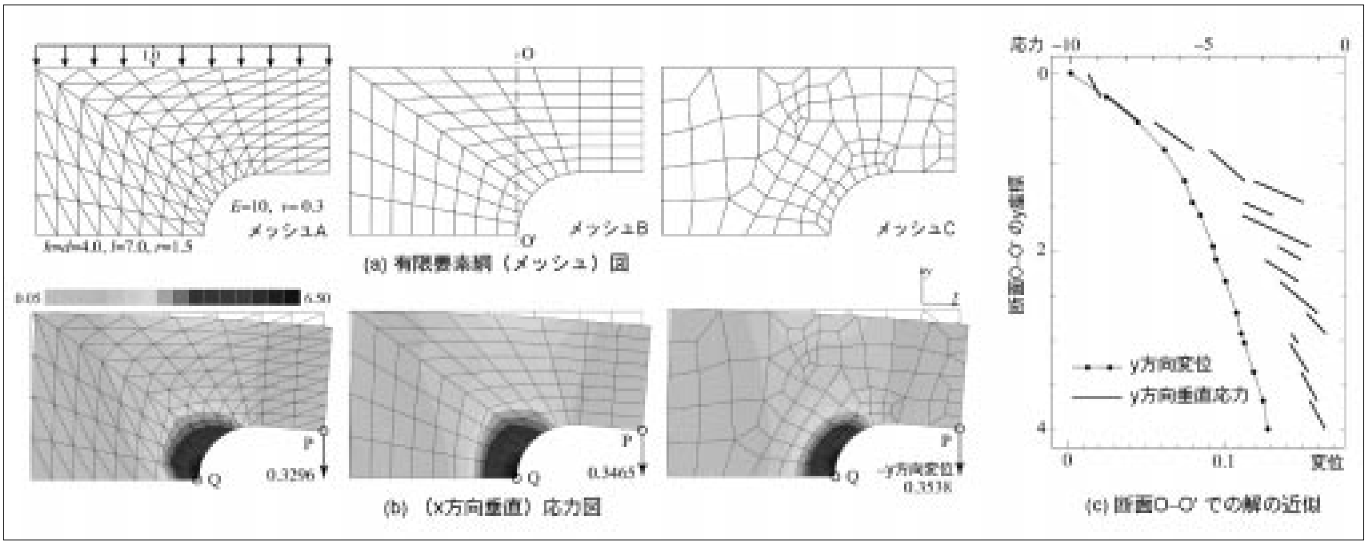


図-6　メッシュと有限要素解

は免れない．このゆがみに対する対策は，今も要素開発（設計）者の重要なテーマの一つとされている．

このように，有限要素法による構造解析で得られる変形は，一般に“硬め（剛）に”評価されるが，要素数を増やせば正しいものに近づく傾向にある．ただし，要素にはいくつかの種類があるので，解析に際しては事前にその特性をある程度把握しておくことが望ましい．

要素ごとの近似

ここでは，特性 4）の解説に移るが，その前に，有限要素網（メッシュ）の「見た目の美しさ」と解の関係について触れておく．図-6 には，冒頭の例で挙げた構造例 (b)（図-1）のメッシュ図とその変形の様子が応力分布と共に示されている．メッシュ A には TRIA3，B には QUAD4，C には両方の要素が用いられている．また，C は故意に見た目の汚いメッシュに仕上げられている．図-6 (b) に示される点 P の変位と応力分布を見る限り，似たような結果が得られている．3 つのメッシュともある程度の数の要素を配置されているからであろう．しかし，図-3 の考察からすれば，最も軟らかい変形を与えている C のメッシュが，見た目の最も汚いにもかかわらず正解に近い解を与えるようである．この理由として

(1) B のメッシュは見た目には美しいが，C と同じく要素がゆがんでいることには変わりないこと

(2) 応力の変化の激しい箇所（図中 Q 点）の周辺において C の方がより細かい要素を多く含むこと

などが挙げられる．

さて，以上の考察を踏まえて，「要素ごとの近似」について解説する．メッシュ B について，図-6 (a) の断面 O-O' における変形，応力を図-6 (c) に示す．変位は断面に沿って連続に分布しているが，応力はひどく現実離れした分布のように見える．すなわち，この例で実際の応力は，断面に沿って連続な関数になるべきだが，要素同士の境界では不連続である．また，この不連続な分布を表す一つ（線分）の傾きと変位の変化に滑らさかはない．このような結果は全く悲観的なものかもしれない．にもかかわらず，この構造は外荷重に対してつり合うのである．

変位が連続に得られるのは，要素間でそれが連続になるような近似関数を設定したからであり，これを要素の「適合性」という．また，応力の不連続性は，要素ごとにつり合いを満足するような近似を行ったために生じたもので（特性の 4)），滑らかさの喪失は，ゆがんだ要素の悪い性能の現れでもある．有限要素法では，一つの要素（今の場合は QUAD4）が隣接する要素から受ける力につり合うように，内部に設定された近似関数の係数が決められる．つまり，要素内のすべての点で支配方程式が成り立つようには施されていないのである．局所的な（点ごとの）応力値を鵜呑みにして何らかの判断を下すことは，あまり好ましいことではない．解析結果に対する判断ミスを防ぐには，有限要素法のこのような特性を理解しておくことが肝要と言えよう．

現象のモデル化と計算力学

以上のように有限要素法は，境界値問題の“近似的”解法の一つに過ぎない．上で示した例では最も適した解析法と考えられるが，一般的には解くべき対象に応じて利用する解法を選定するべきである．最近では，既存の

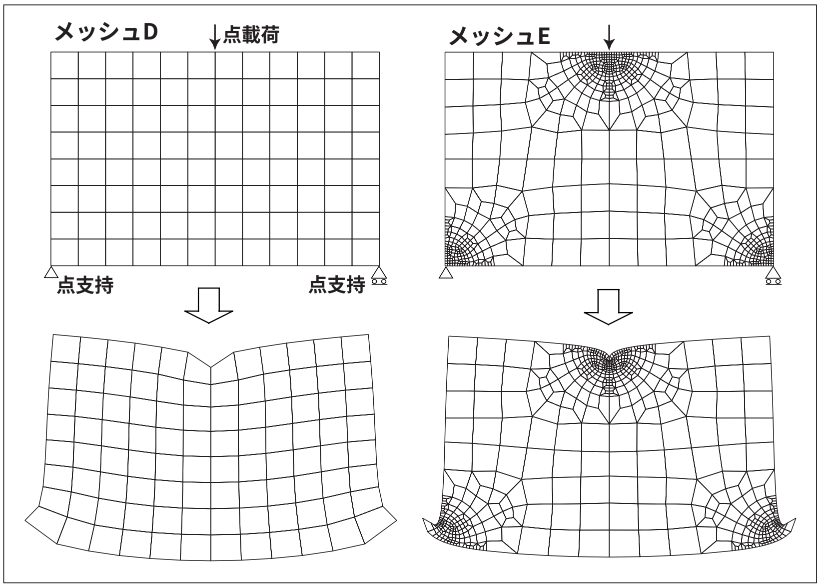


図-7　不適切な数理モデルに起因する逆説

どの手法でも対応できなかった問題に対して，メッシュフリー法などの新規の手法が開発されており，解析者の選択の幅も広がってきている．

しかし，解析手法の選定以上に重要なことは，現象のモデル化であることを忘れてはならない．実際，「数値解など当てにならない」と評されるとき，モデル化の不備までも含んでいることが多い．また，大胆なモデル化を施したことを棚に上げ，解析結果を神格化することは計算力学のあるべき姿ではない．図-1 の例では，構造の細部情報は省いたが，実際の構造物はボルトや溶接部などの弱部，積層構造や鉄筋の配置等による補強効果を狙った複合構造などが存在する．これらすべてをモデルに組み込んだ解析はほとんど不可能であるので，通常はそれらを無視してモデル化し，選定した解析法の仕様に則した入力データを作成する．われわれは，そのことを踏まえて解析に臨み，用いる手法の特性を理解した上で得られる数値解を解釈せねばならない．そのときこそ技術者としての工学的センスが問われるのである．

このように，現象のモデル化とその解析には，数学的知識と力学的な洞察は欠かせない．本稿の最後に，その特殊な例として，有限要素法の理論における有名なパラドックス（逆説）を紹介する．図-7 には，点荷重を与えられ点支持された構造が，異なる二つのメッシュで分割されている．一見，メッシュ D よりも E の方が正しい解を与えそうである．なぜなら，変形・応力の変化が激しい載荷点および支持点付近に細かい要素が配置されているため，より正確に近似されるであろうと予測されるからである．しかしながらこの解析は，変形図を見る限り正しそうには見えないし，メッシュ E から得られる変形は明らかに現実的ではない．これは，許容されないモデル化（載荷／支持の与え方）にもかかわらず，素直にメッシュを細かくしたために生じた齟齬である．すなわち，構造力学におけるはりや板の数学モデルとは異なり，連続体力学における物体上の点は荷重を支えることができないため，載荷／支持点周辺のメッシュを細かくすればその数学的な“矛盾をより厳密に”表現することになるのである．

工学への貢献

冒頭で述べたように，計算力学とは「力学的な諸問題を解決するための計算技術および理論」を指すものである．ある現象について，数値計算（シミュレーション）を行って新たな知見を得ようとする場合，その行為自体は力学の立場にあり，本来的な意味での計算力学ではない．解析対象に対して適切な道具が存在しない場合には，力学的な洞察以前にその解析計算を可能にする方法論が興味の対象となり，計算力学にはそれを支援する技術面での貢献が期待されているのである．本稿内で紹介した内容は，そのような役割を担う計算力学のほんの一側面に過ぎないが，数値解析に携わる技術者が力学や数学だけでなくさまざまな計算技術とその特性をある程度把握しておかねばならないことをご理解頂けただろうか？

われわれが直面するすべての問題を解決し得る完全な道具など存在しない．しかし，計算力学の提供するツールは，その性能とモデル化のレベルの範囲内ではあるが，何らかの答えを出すことで工学に貢献しうる．従来の考え方では解決困難な問題に遭遇したとき，あるいは既存の計算ツールの更なる高度化を迫られたときには，技術革新を行うことで克服できるはずである．そう信じて常に問題に取り組む姿勢が，計算力学を，ひいては工学を発展させるのものと著者は考えている．この意味において，今日の計算力学の目指している新たな方向性については，3-1 節の「計算力学のツール」，「設計のツール」を参考にされたい．また，挙げ始めるときりがないので，あえて参考文献は省略したが，計算力学を構成する個別の技術的知識を身につけるための書物は比較的容易に手に入るので，興味を持たれた読者はぜひチャレンジして頂きたい．

3-1．応用力学の挑戦　開発される新しいツール

計算力学のツール
リアルワールドシミュレーションを目指して

樫山和男　Kazuo KASHIYAMA
正会員　工博
中央大学教授　理工学部土木工学科

近年，コンピュータの性能および計算手法・技術の進歩に伴って，実際の問題をダイレクトに解く，リアルワールドシミュレーションの計算事例が数多く報告されるようになっている．ここでは，リアルワールドシミュレーションを可能にした，計算力学におけるいくつかのツールについて紹介する．

大規模計算を可能にするために

リアルワールドシミュレーションは一般に大規模計算となるが，この大規模計算を実用レベルで高速に行うための手法として並列計算がある．並列計算の最初の構想は，1922年の“Richardsonの夢”に見ることができる．これは，気象予測の計算を行うために64 000人を円形劇場に集めて，北半球全体を2 000のブロック（各ブロックに32人）に分けて一斉に手回し計算器により並列計算を行うというものであった（図-1参照）．この夢が実現できれば，気象の6時間先の予測計算を3時間で終了できると試算した．“Richardson”の夢から50年後（1972年）に，世界で最初の並列コンピュータ（ILLIAC IV）が開発された．これを契機として，並列コンピュータの開発が競って行われるようになり，1980年代の後半に入ると並列コンピュータの性能はベクトル型スーパーコンピュータのそれを上回り，現在ではスーパーコンピュータ＝並列コンピュータとなっている．また，ワークステーションやパーソナルコンピュータを高速なネットワークで接続することにより，高性能なクラスター型仮想並列コンピュータの構築も容易になっており，だれもが並列計算を手軽に行える環境が整いつつある．

このような並列計算環境の整備に伴い，有効な並列計算手法が数多く提案されている．並列計算の方法としては，領域分割による方法が最も一般的である．すなわち，解析領域を複数の小領域に分割して，その領域ごとにプロセッサを割り当てて一斉に同期をとりつつ計算を行うものである．図-2は，伊勢湾台風による高潮計算に用いられた領域分割図であり，解析領域が512の小領域に分割されている．計算速度および使用可能なメモリーは，使用するプロセッサ数にほぼ比例して向上することから，並列計算は大規模計算や緊急性の高い予測計算等に有効に用いられている．並列プログラミングの支援ツールとしては，並列言語（High Performance Fortranなど）やメッセージパッシングライブラリ（MPI，PVMなど）があり，その機能は年々向上している．

また，大規模計算における連立一次方程式の解法については，1980年代後半に省メモリーな要素ごとの処理に基づく反復解法が開発されてからは，並列化の容易さもあり反復解法（前処理付きのCG法やGMRES法）が主流となっている．

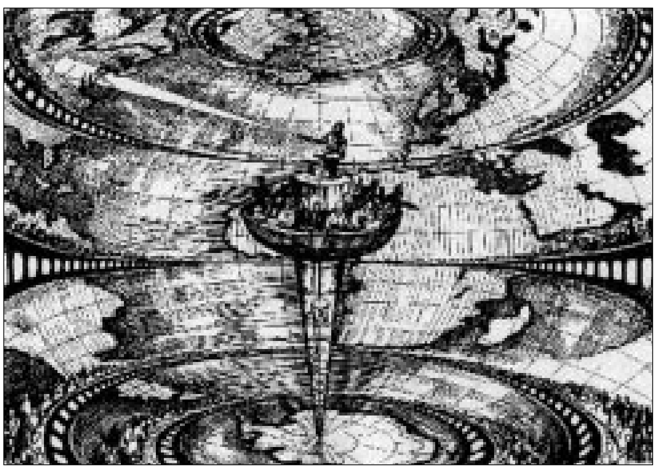


図-1　Richardsonの夢[1)]

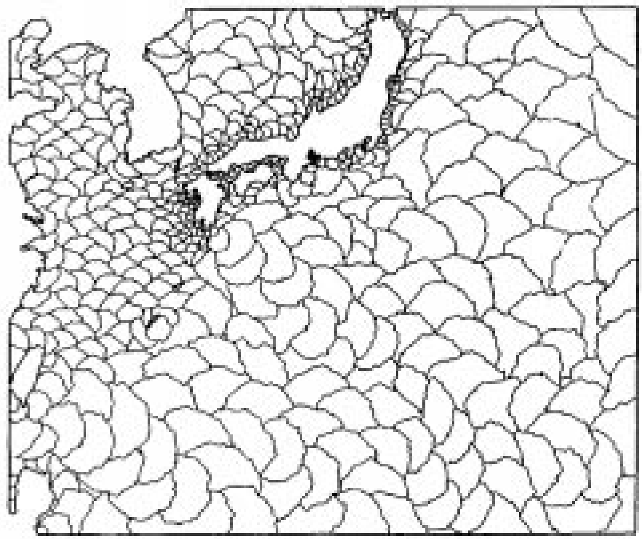


図-2　高潮並列計算のための領域分割図

モデル化をより正確に行うために

1）メッシュ生成法とメッシュレス法

リアルワールドシミュレーションに欠かせない重要なツールの一つに，複雑な計算領域に対するメッシュ生成技術がある．計算力学で扱う問題が2次元から3次元に移行してから，ますますメッシュ生成の重要性が認識されてきた．図-3にリメッシュを伴う複雑問題の例として，ヘリコプター周りの気流の解析に用いられたメッシュ図を示す．メッシュ生成はヘリコプターのCADデータを基にして，四面体要素に基づくDelauny分割法により行われている．この例題では，プロペラの回転を絶えず考慮する必要があるため，領域をプロペラといっしょに回転する円盤状のメッシュ領域（図-3），その領域を完全に覆う層状の移動メッシュ領域，さらにその外側にある固定メッシュ領域の3つの領域に分割している．中間の層状のメッシュ領域では，回転するプロペラ周りの円盤状メッシュに滑らかに接続させるため，タイミングを見てメッシュをスリップさせる手法を用いてリメッシュを行っている．計算手法には，後述の移動境界を考慮した並列計算に基づく有限要素法が用いられている．メッシュ生成は，一般にCADやGISデータ等を基に行われるが，医学や材料分野への応用では，X線CT画像等によるイメージベースのメッシュ生成も行われている．

また，一方で複雑な計算領域に対するメッシュ作成の労力が大きいことも事実であり，これを回避するための方法としてさまざまなメッシュレス法が提案されている．メッシュレス法は，単にメッシュ作成が不要であるという他に，大変形解析やクラックの進展解析などリメッシュが必要な問題に対しても有利である．また，近似関数の柔軟性から特異性や高次連続性の表現も容易であり，今後の発展が期待される手法である．

(2）移動境界手法

理工学の問題において，解析領域の形状が時々刻々変化する問題は数多い．例えば，固体の大変形問題，構造と流体の相関問題，流体の自由表面問題などである．それらの問題は数学的に移動境界問題と定義され，未知境界としての移動境界を含んだ問題となっている．移動境界を正確に考慮できる有効な手法として，ALE（Arbitrary Lagrangian Eulerian）有限要素法とSpace-Time有限要素法が提案されている．ALE法は，メッシュ速度の導入により領域内のメッシュを任意に変形・制御することが可能であり，変形の記述をLagrange記述とEuler記述とを混合した立場の記述により行うものである．時間方向の離散化には，通常差分法が用いられている．一方，Space-Time法は，時々刻々変化する空間・時間領域を有限個の空間・時間スラブに分割し，それに対して有限要素法を適用する方法である．この方法は，ALE法と手法的にほぼ等価であり，かつ無条件安定の時間積分であるため安定性が高いという長所がある．

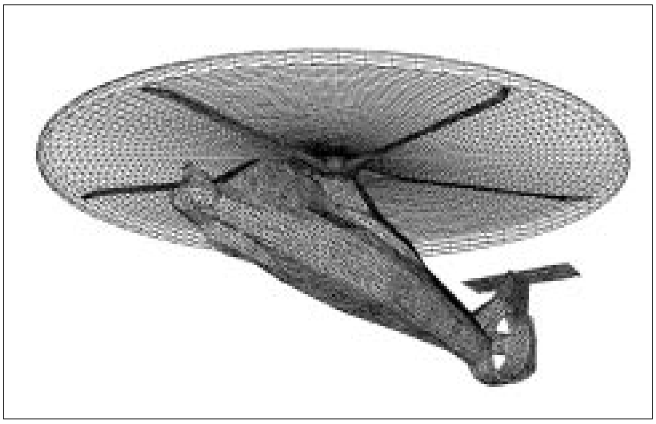


図-3　ヘリコプター周りの気流の解析メッシュ

(3）マルチスケール法

空間（あるいは時間）スケールの相対的な差が顕著な力学現象に対して，各スケールにおいて力学挙動を記述し，それらを関連付け，数値的に解くことによってその特性を明らかにするための解析手法としてマルチスケール法がある．代表的な手法としては，漸近展開手法に基づく均質化法がある．この手法は，

1）ミクロな構造に周期性がある

2）マクロに一様な場である

の仮定が成立する問題に対して有効である．図-4は，アスファルト混合物の応力解析に用いられた微視領域であり，X線CT画像を用いて一画素一要素としてモデル化したものである．コンクリートやアスファルト混合物，岩盤などの建設材料の場合には，厳密には1）の仮定は成立しないが，ある程度大きなミクロ領域を考えることにより，均質化法の適用が可能となっている．均質化法は，複合材料の応力・強度解析や浸透流解析などさまざまな問題に用いられている．

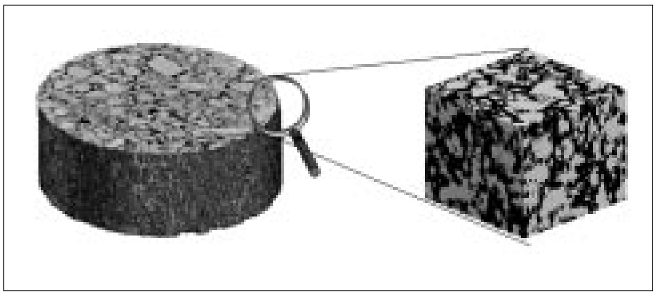


図-4　アスファルト混合物の均質化法解析

計算の信頼性をより高めるために

数値計算の解の精度は，メッシュに大きく依存することは周知のとおりであるが，リアルワールドシミュレーションにおいては計算結果の信頼性の評価は容易ではない．この問題に対しては，計算結果から離散化誤差を評価して，誤差の大きい領域に対してメッシュの再構築（節点移動，要素の細分割，要素の高次化等）を行う，いわゆるアダプティブ法が実用レベルで有効に用いられている．

本稿では，リアルワールドシミュレーションを可能にした，計算力学におけるいくつかのツールを紹介した．その他にも，境界要素法や不連続性体に対する手法など，紙面の関係上触れることのできなかった有効なツールは数多い．それらを含めた計算力学のツールの詳細については，参考文献2および3を参照されたい．計算力学は，ツールの発展・整備により，その真の目的である“計算による力学現象の理解と解明”の実現に向けて着実に前進しているといえる．

参考文献

1－L.F. Richardson, Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge University Press, London, 1922

2－http://mems.rice.edu/tafsm/

3－土木学会応用力学委員会計算力学小委員会第1期活動最終報告書, p.108, 土木学会, 2000

理論力学のツール

池田清宏 Kiyohiro IKEDA
正会員 Ph. D
東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

理論力学のツールとして，カオス，フラクタル，対称性破壊分岐等に関する理論が研究・開発されている．以下，著者が推薦する入門書を紹介する形でこれらの理論を概説し，その応用例として，材料の分岐に関する研究を紹介する．

カオス・フラクタル

わからないことの代名詞としてよく使われるカオスは，最初の状態の違いがごくわずかであっても，結果として起きる現象が大きく違ってしまう性質を表す．例えば，気象や天候の微小な変動は，初期条件依存性が強すぎて，精密には予測できないことがカオスの代表例として挙げられる．

カオスの入門書としてはスチュアート「カオス的世界像－神はサイコロ遊びをするのか（白揚社）」を薦める．「神のサイコロ遊び」は，われわれの運命は神様が振るサイコロの目に弄ばれているという，自然科学の無力感・悲観論を訴えかけている．秩序と無秩序，調和とカオスは相反する言葉である．カオスは，ニュートンに始まる宇宙を「時計仕掛け」的なものと見る考え方や，宇宙全体の物質の初期位置と速度がその後のすべてを規定するというラプラス的な世界（宇宙）観注1）を打ち砕くものであり，「相対性理論，量子力学とともに20世紀最大の自然認識の変革を迫る理論として脚光を浴びつつある」とこの本の訳者は述べている．ニュートン力学のバラ色の世界が，相対性理論により塗り替えられ，不確定性原理により揺らぎ，最後はカオスと相成ったというわけである．

カオスのメカニズムが動的問題の研究等から明らかにされており，カオス，フラクタル注2）等の現代の非線形力学の花形とも言える成果を生み出している．カオスとフラクタルの入門書としては，トムソンの「不安定性とカタストロフ（産業図書）」と高安の「フラクタル科学（朝倉）」を薦める．

気象や天候の細かな変動は予測できなくとも，四季は必ず来ることを思い浮かべられたし．不安定な現象にも安定なものはあるものである．例えば，散逸系は起動が時刻 t 無限大において落ち込むアトラクターと呼ばれる構造を持つことがあることが知られている．アトラクターのうち，起動が時間平均的に不安定であるものをストランジアトラクターと呼び，これこそが散逸系のカオスの実体である．

周期倍分岐は分岐がカオスを生み出す例として有名であり，液体ヘリウムの熱対流等の多岐にわたる現象に見られる．ある周期解が不安定化し，周期が倍々となる解が次々と発生し，周期が無限大に発散するとともにカオスに発展する．この分岐は周期倍増型カスケード分岐と

写真-1　ベナール対流により生成された岩の節理
（玄武洞，広島大学　有尾一郎撮影）

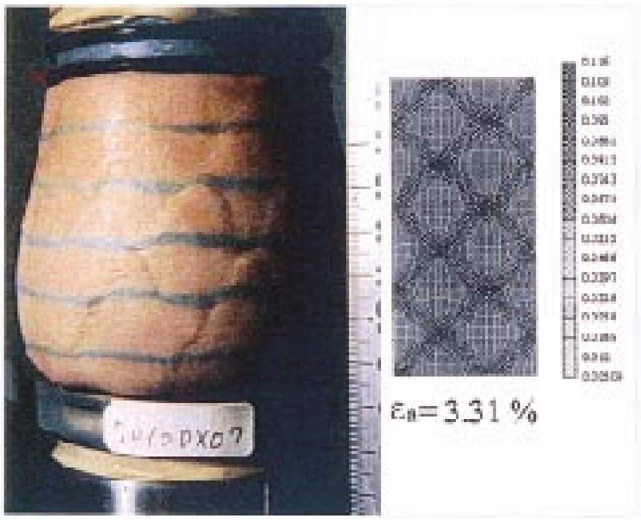


写真-2　砂の三軸試験供試体に現れたダイアモンドパターンとその数値シミュレーション（長岡技術科学大学　山川優樹・東北大学　須藤良清）

も呼ばれており，分岐ごとに倍々に分かれる分岐枝はいちじくの木（フィグ・ツリー）と呼ばれるものである．

対称性破壊分岐

このように，不安定性やカオスは分岐により誘発される．特に，着目している系の状態，すなわち対称性が突然変化する対称性破壊分岐は自然界のパターンの形成を司る重要な現象である．

対称性破壊分岐の入門書としては，スチュアートとゴルビツキーの「対称性の破れが世界を創る－神は幾何学を愛したか？（白揚社)」を薦める．この「神は幾何学を愛したか？」の原題は「Is God a Geometer?（神は幾何学者であるのか？)」となっており，自然界の幾何学的なパターンが分岐により秩序だって形成されることを礼賛している．対称性破壊分岐はカオスと相反するものであり，自然科学の運命論・楽観論であると言えよう．

対称性破壊分岐の代表的な例としては，マントル対流のモデルであり大陸移動説の論拠となったベナール流や，地球の大気の流れのモデルである回転同軸二円筒間のテーラー流があげられる．ベナール対流により生成された玄武洞の岩の節理を写真-1に一例として示す．日野の『流体力学』（日野幹雄，朝倉書店，1987）がいろいろな流れのパターン写真を集めており，興味深い．また，シェルやドーム等の構造物の分岐もこの一種である．さらに，岩石や粘土の亀裂や滑り線のパターンをこの現象として捉えるアイデアも提案されている．動的問題では空間的な対称性だけでなく，時間的な周期性も系の広い意味での対称性となる．

対称性は対象とする系の外観を記述するだけでなく，その力学的挙動のメカニズムをも支配するものである．対称性を持つ系の分岐の一般論は完成の域に至っており，分岐を起こす系の幾何学的・定性的な性質に関する洞察を与えている．実験や解析を車に喩えると，この理論が与える情報は地図のようなものであり，両者が補完し合うことが複雑な分岐現象の理解に通じるのである．

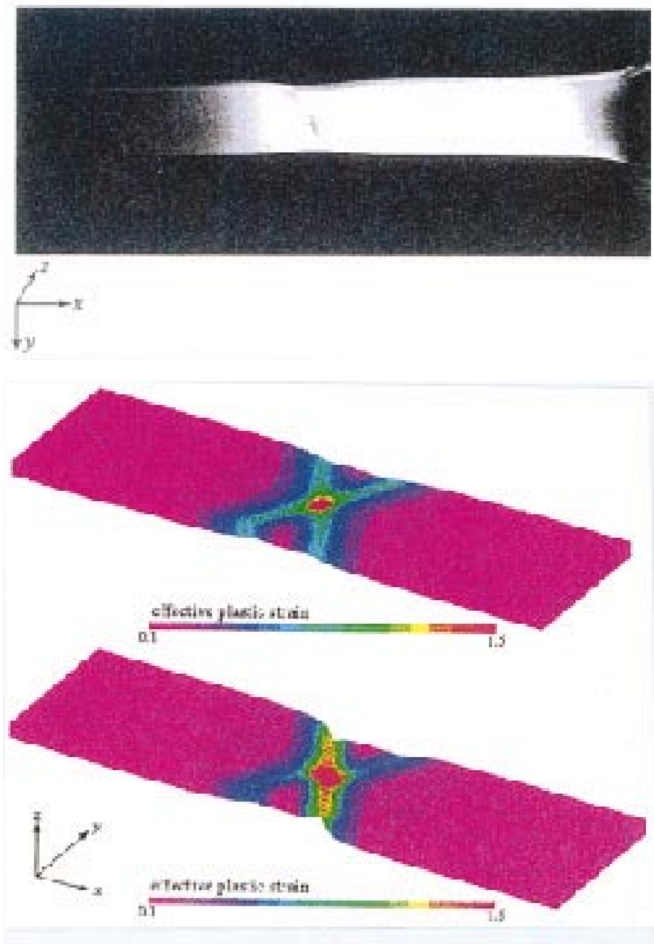


写真-3　鋼材の分岐変形シミュレーション（東北大学　岡澤重信）

材料の分岐

最後に，土木工学に馴染みが深い材料の分岐に目を転じる．材料の変形挙動にも分岐が関わっていることが近年明らかにされてきており，いろいろな研究が行われている．

砂の三軸試験供試体に現れたダイアモンドパターンを写真-2 の左側に示す．このような幾何学模様は均質な材料にのみ発生するものであり，われわれが（ある程度）均質な供試体を作り上げたことに対する神様のご褒美とも言えるものである．この写真の右側にその一例を示すように，この種のパターンの解析が近年土質工学の分野で行われるようになってきている．

分岐は土質材料だけでなく，他の材料の変形挙動も支配している．一例として，鋼材の引張り試験片の変形性状を写真-3 の上側に，その 3 次元分岐変形シミュレーションの結果をその下に示す．非常に多くの要素を使った解析により，鋼材の変形がリアルに表されている．

今後の材料の分岐研究には，この種の大規模な非線形解析法の開発が最大の課題となっている．最後に，本稿において紹介した理論力学のツールが，計算力学のツールと手を結び，新たな学問分野へと発展することを希望し，本稿のまとめとする．

注1）数学の講義で習ったラプラス変換では，初期値を与えるとすべて解けてしまう明快さを思い出そう．

注2）フラクタルとは自己相似性を有するもののことであり，自己相似性とは部分を拡大すると全体と同じような構造になるような性質のことである（『フラクタル科学』高安秀樹，朝倉書店，1987）．

超音波計測のツール

北原道弘 Michihiro KITAHARA
正会員　工博
東北大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻

計測器とパソコンが小型・高速・大容量化しかつ安価になったことから，計測波形と解析を結ぶ道具が整ってきている．従来の計測器はパソコン化し，逆にパソコンは計測器化しつつあるとも言え，両者の垣根は取り除かれつつある（と感じる）．未知の欠陥と計測可能な情報を結びつける関数関係をパソコンの中に準備すれば，従来の探傷器にこだわらなくてもよい状況が整いつつあると言える．このとき，大切なことはパソコン内に準備された未知欠陥を推定するための関係式をブラックボックス化しないことであろう．

研究段階のものであり，まだ現場への適用には及ばないが，計測散乱波形を近似的な関係式に組み込むことによって欠陥の幾何学的諸量を推定しようとするいくつかの試みを以下に紹介する．

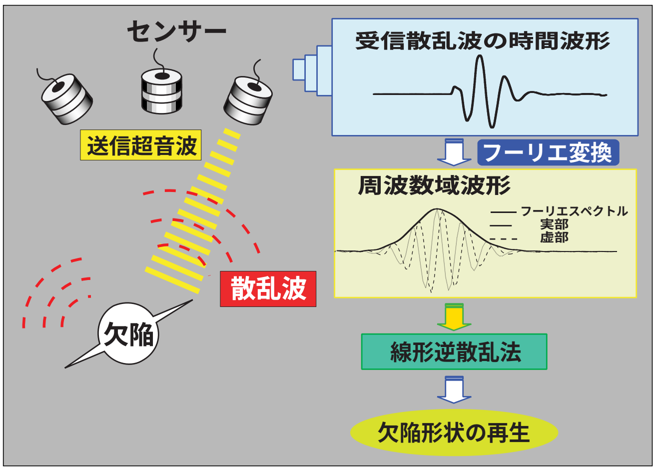


図-1　超音波の送信と散乱波の受信

線形逆散乱法による欠陥像の再生

通常の検査により何か欠陥らしきものがこの辺にありそうだということがわかっているとき，欠陥の正確な位置と形状を決めたい場合がある．このとき，センサーから欠陥近傍のある一点に向けて超音波を送信し，欠陥により散乱された波動をセンサーで受信する(図-1 参照)．このとき受信センサーは送信と同じセンサーであっても良いし，別の何個かのセンサーであっても良い．要は，欠陥を囲むような何点かで散乱波形情報を計測する．ここで，「囲むような＝方位情報」と「波形＝(振幅と)位相情報」が重要である．計測された時間域波形をフーリエ変換により周波数域の波形に変換する．波速を介して周波数は波数に変換できるため，波数域の波形を得たことになる．空間のフーリエ変換域は波数域であるから，波数域に変換された散乱波形情報を波数空間で“うまく”フーリエ逆変換してやれば，欠陥の空間像を再現することが期待できる．固体内で超音波は弾性波として伝播しているため，ここで言う“うまく”とは弾性散乱波

と欠陥形状の関係がフーリエ変換を介して線形関係となるように数式構造を整理することを意味している．また，フーリエ逆変換により欠陥像が再生できる点は，高速であるという意味において実用上大切である．図-2 は円形空洞の両側にノッチ状の突起が突き出た欠陥モデルを作成し，中心周波数 1 MHz の圧電素子型センサーにより散乱波を受信して線形化弾性逆散乱法[1] により欠陥像を再生した一例である．

干渉の利用：一点情報で何ができる？

少ない計測点情報，できれば一点での計測波形情報から欠陥の幾何学的情報を得たい場合がある．一般的に言えば難しいが，調べたい欠陥が単一の開口した平面クラックである場合には，クラック端からの回折波の干渉を利用してクラック長や傾きを推定できる．図-3 はクラックに向けて超音波を送信し，クラックの両端からの回折波を受信し，そのフーリエスペクトルを取り出した状態を示している．この干渉周期はクラックの長さと傾きに関係しており，これらの関係式を書き下すことが可能である．ここで未知量はクラックの長さと傾きの二つであるから，一点で角度を変えた二回の計測を行うことにすれば，二つの独立な関係式を得て，これら二つの関係式からクラック長と傾きを陽な形で計測干渉周期により表現できる．図-3 の下部は，傾き 30 度，長さ 6 mmのクラックの推定結果[2] である．

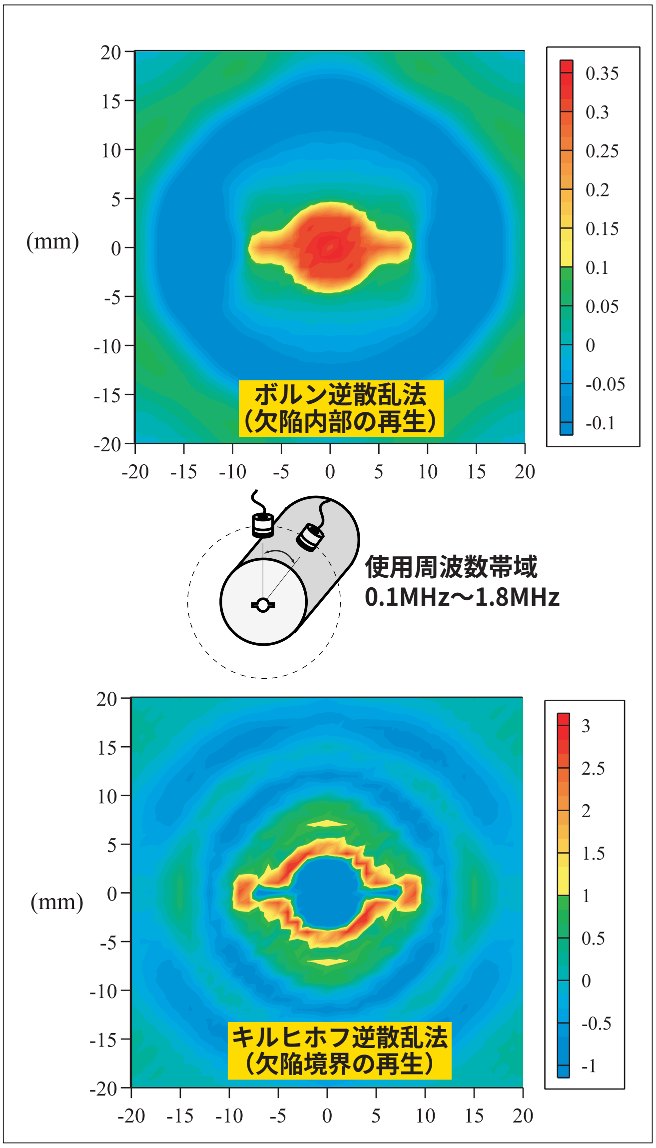
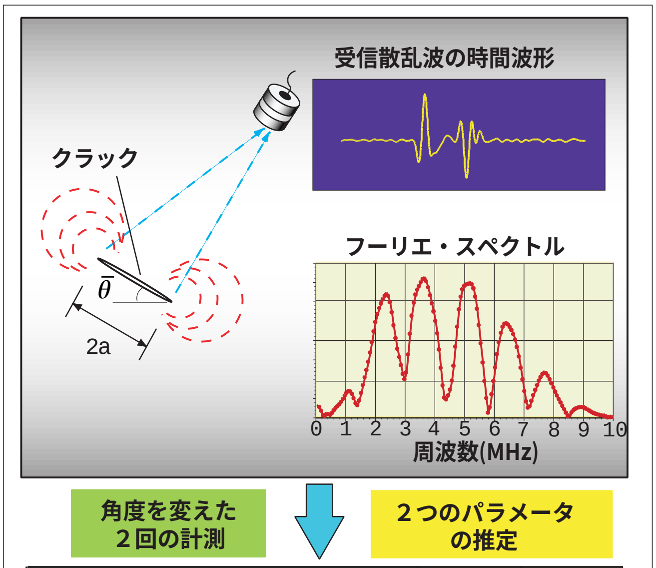


図-2　空洞とノッチから成る欠陥形状の再生

波動と振動の組み合わせ

薄層で母材が保護された部材を使用しているとき，薄層と母材間の剥離域の大きさ(広さ)を特定したい場合が



入射角 1	入射角 2	周波数差 1	周波数差 2	傾き θ 推定値	長さ 2a 推定値
2.5°	5.0°	1.416MHz	2.860MHz	32.84°	6.07mm

図-3　干渉を利用したクラック長と傾きの推定

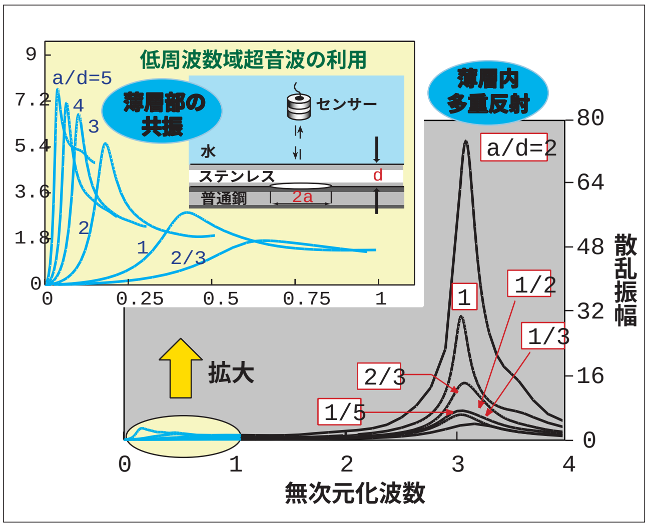


図-4　共振を利用した剥離部の大きさの推定

ある[3]．このとき，剥離した薄層部に局所的な固有振動（共振状態）を励起させることができれば，共振現象は剥離域の大きさに支配されるから，共振周波数を計測することにより剥離域の大きさを推定することが可能となる．このとき薄層の層厚を決めておく必要があるが，これは超音波の多重反射を利用すれば決まる．層厚が薄いと多重反射による共振ピークは高周波数域に存在し，層厚に比較して剥離域が大きくなると薄層の剥離部の共振ピークは低周波数域にシフトする（図-4）．現状では分離計測が現実的と思われるが，低周波数域を含む超広帯域かつ高感度のセンサーが開発されれば，両ピークが同時に計測でき，剥離部の大きさの瞬時推定が可能となる．

非均質体中の欠陥計測

機械や電気・電子部品と比較して土木構造材料の特徴は非均質性にあると言えよう．非均質材料中に発達した欠陥のイメージを図-5 に示す．対象とする欠陥の大きさが材料自身の非均質性を特徴付ける代表長と同程度の大きさであれば，この欠陥からの散乱波形情報は材料自身の非均質部からの散乱波形情報に埋もれるため，一般的に言えば定量化は難しい．対象とする欠陥が成長して，欠陥の代表長が材料の非均質性の代表長よりも 1 オーダー大きくなれば，欠陥の代表長にオーダーを合わせた波長の超音波を送信することにより，欠陥からの散乱波形情報を優先的に受信することが可能となる．ここで，材料自身の非均質部からの散乱情報も計測されるが，この影響が少ない波長の波を選んでいるため別途処理可能な手法(独立散乱体理論)が存在する．この意味において，非均質材料中に欠陥が発達した場合の欠陥の検出・定量化は可能になると予想される．このとき，ポイントは低周波数域散乱波形情報の処理技術の開発と安定した帯域特性を有する低周波数域センサーの開発である．

図-5　非均質体中の欠陥と送信超音波

最近，低周波数域超音波センサーの開発の動きが，レーザー超音波[4]，電磁超音波[5] に見られる．両者共に非接触計測が可能であり，今後の発展に期待したい．と同時に，これらセンサーで受信した波形情報を評価対象とする欠陥情報と関係付けるのは土木技術者の仕事であり，センサー開発との連携が重要となろう．

参考文献

1－中畑和之，北原道弘：計測波形による欠陥形状の再生と使用周波数帯域に関する考察，応用力学論文集，Vol.3，2000

2－竹内大樹，北原道弘：超音波によるクラック長と傾きの推定，土木学会東北支部技術研究発表会概要集，pp.60-61，2000

3－Kitahara, M. and Chizaki, T.: Application of resonance spectra for crack length estimation, Proc. of the Second Japan-US Symposium on Advances in NDT, pp.335-340, JSNDI, 1999

4－山中一司：レーザー超音波法の原理と応用，非破壊検査，Vol.49(5), pp.292-299, 2000

5－Hirao, M. and Ogi, H.: Electromagnetic acoustic resonance and materials characterization, Ultrasonics, Vol.35, pp.413-421, 1997

設計のツール

鈴木克幸 Katsuyuki SUZUKI
正会員　Ph.D.
東京大学大学院　新領域創成科学研究科　環境学専攻

計算力学と設計

工業製品の設計において，プロトタイプ作成以前にコンピュータ上で性能評価や製造過程シミュレーションを行う CAE（Computer Aided Engineering）は，設計作業を迅速化，効率化し開発期間を短縮するのみでなく，解析結果を設計作業にフィードバックさせていくことにより性能向上を図ることができるため，さまざまな機械設計の分野において不可欠なものとなりつつある．特に機械系の製品の場合，図-1 に示すように設計から試作，評価のサイクルを繰り返して概念設計から詳細設計，生産設計へと設計を進めて行く．そのため，試作の回数を減らし，設計の詳細化を効率的に進めていくことが重要であり，設計作業の急速な 3 次元 CAD 化に伴い，計算力学による設計評価においても同じ 3 次元モデルの利用が進んでいる（さらに，試作におけるラピッドプロトタイピングの利用や CAD の情報をそのまま用いたデザインレビューも行われる）．たとえば，自動車の開発の際には衝突解析，騒音・振動，車両運動，車体周りの流れ解析など，さまざまな分野で解析が用いられ，製品開発の短期化，コストダウンに大きく役立っている．

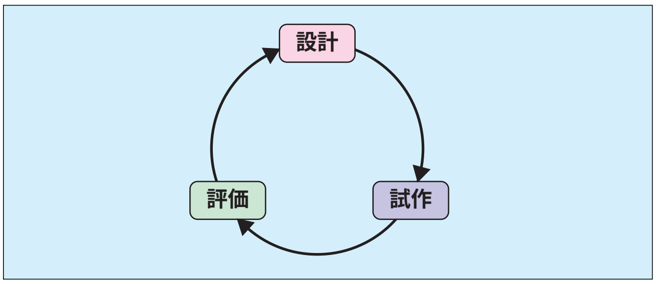


図-1　機械分野における製品開発サイクル

CAE の考え方は解析手法を限定するものではなく，現在でもさまざまな手法の研究が行われているが，設計の実務に用いられているのはほとんど有限要素法（FEM）であり，ここでは FEM に限定した話をすることとする．

解析モデルの生成技術

設計と解析をスムーズに繰り返していくためには，設計モデルからシームレスに解析モデルを生成することが重要である．これらのモデルを統合することにより解析結果に基づく設計変更をダイレクトに設計モデルに反映させせることができる．ところが，現状の有限要素解析ではこのようなモデルの完全な統合は難しい．現在の一般的な有限要素解析モデルの作成の手順は図-2 のように 2 つの段階に分けて考えることができる．

- 解析対象の形状の簡略化，および解析条件（荷重条件，指示条件など）の設定
- 簡略化モデルに対する，有限要素メッシュの生成

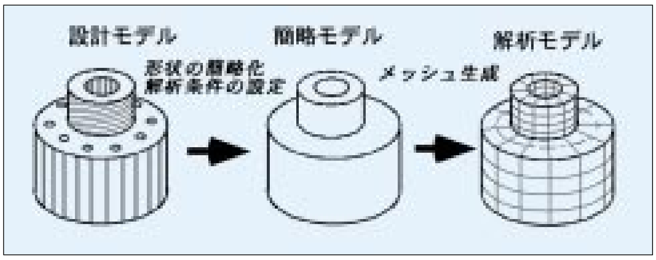


図-2　設計モデルから解析モデルの生成の流れ

一般に，CAD などで用いられる設計モデルは，製造するべき対象物の非常に細かい形状まですべて入ったものになっている．しかし，力学的解析においてはその詳細形状はサンブナンの原理により無視することができるため，力学的に重要度を持たない（とエンジニアが判断する）部分の詳細形状を簡略化した，簡略モデルがまず作成される．このステップは，自動化することは非常に困難で，ほとんどエンジニアの手作業に頼っているのが現状である．実際，極端な場合には CAD のデータを基に解析モデルを生成するよりも，ゼロから解析モデルを作成し直した方が結果的に簡単にモデルを生成できるケースも少なくない．しかし，近年フィーチャ（形状特徴）を使った CAD が普及し，形状簡略化の自動化も多少可能になりつつある．

一方，自動メッシュ生成技術はこの 10 年ほどで大きく進歩し，2 次元領域や 3 次元曲面に対してはほぼ問題なく自動メッシュ生成が可能である．3 次元領域に対しても，4 面体メッシュであればよほど複雑な形状以外ではほぼ問題なくメッシュ生成が行えるところまで来ており，現在 6 面体の自動メッシュ生成技術に関して研究開発が進んでいる．また，メッシュを生成することなしに解析を行うメッシュレス解析法の研究や，ボクセル技術を応用したイメージベース解析法などの研究も盛んに行われている．

統合解析システム

有限要素解析の効率的な運用には，前述のモデル生成技術（プリプロセッシング）以外にも，さまざまな統合化技術が必要である．近年は単に1度解析を行うのみでなく，誤差評価により解析精度を評価し，アダプティブ法などにより再解析を行ったり，解析結果に基づき設計変更を行い，変更した形状に対して再度解析を繰り返すというように，解析そのものを何度も繰り返す必要がある．そのため，このプリプロセッシング注1)，有限要素解析，ポストプロセッシング注2) の一連の流れ，およびこれらのさまざまなツールを統合化する技術が重要になってくる．これらの異なる段階の作業を一貫した環境で連続的に行うようなシステムを「統合解析システム」と呼ぶ．

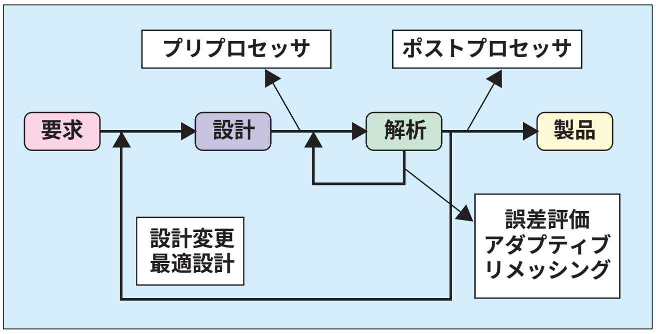


図-3　統合解析システムの例

図-3に，統合解析システムの例を示す．ある種の製品に対する要求に対し，設計と解析を繰り返しながら製品へと結びつけていくわけであるが，CADにより設計されたデータから有限要素モデルを生成するには前述のようなプリプロセッサの利用が不可欠である．解析を行った後，その解析が十分な精度で行われているかどうかを事後誤差評価によりチェックし，もし解析精度が十分でないときには，アダプティブリメッシング（誤差の大きな領域のメッシュをより細かく細分割する）や，プリプロセッサによるメッシュ分割のやり直しによって十分な解析精度が出るまで再解析を行う．解析結果は，ポストプロセッサによる可視化の結果による設計者の評価や自動設計変更により，要求を満足し，かつよりよい設計になるまで設計と解析を繰り返していく．この設計の最適化（最適設計）に関しても，さまざまな研究が行われている．

注1）メッシュの生成，境界条件の定義などの有限要素法の前処理技術のこと．
注2）結果の可視化などの有限要素法の後処理技術のこと．

汎用解析ツールの動向

研究されている計算力学の技術が実際の設計の現場で使われるためには，市販の汎用ソフトウェアとして流通することが必要である．現在，市場に出ている汎用解析システムとして大きく2極に分かれている．すなわち，製造業の設計部門で利用される，CADとの連携を重視した解析ソフトウェアと，解析部門で利用される，より専門的な問題を解析するソフトウェアである．前者は主に線形弾性解析や固有振動解析など，必ずしも高度な力学的知識を必要としない問題の解析を，設計者自身が行うために，CADソフトのインターフェースをそのまま用いて行われることが多い．ユーザーに対してメッシュを意識させないように，アダプティブ有限要素法や境界型の解析法なども用いられている．ほとんどのハイエンドのCADはすでに解析機能を備えている．

一方，大変形や接触，流体との連成などの高度な知識を必要とする解析の要求に対しては，NASTRANなどの古くからの汎用ソフトが依然として強い．しかし，これらの汎用ソフトもダウンサイジングの影響を受け，汎用のプリ・ポストプロセッサとともにPC上で動くようになってきている．しかし，これらの高度な解析を行うには力学的な素養のみならず，有限要素法に対する豊富な知識を持った解析者が不可欠であり，製造業においては解析部門の優秀な人材の育成が難しくなり，アウトソーシングが今後ますます行われていくと予想される．

解析ツールの今後

解析技術の進歩に伴い，機械系の設計・解析の現場では従来行われてきた構造解析に加え，鋳造，鍛造，切削といった生産・加工のステージのシミュレーションに使われるようになってきている．しかし，加工によって解析対象の形状が変化するため，ここでも解析モデルの生成が問題となる．解析モデルの形状が，解析の進展に伴い大きく変化するような解析では，メッシュレス解析やイメージベース解析の有効性が指摘されている．

また，現在別々に行われている構造解析と機構解析は，今後統合されていくものと思われる．構造解析ソフトが機構解析の機能を加えていくか，機構解析ソフトが構造解析の機能を加えていくかどちらの方向に進んでいくかはまだ見えていないが，確実に統合の方向に向かいつつある．

地殻変動の計測とシミュレーション

加藤照之 Teruyuki KATO
理博
東京大学教授　地震研究所

日本列島の地殻活動の監視のため，全国に約1 000点のGPS観測点が構築され，日々その精密な座標が計算されて地殻変動監視に役立てられている．応用力学の手法を取り入れることにより，地表の変動の計測データから地殻内部の応力を推定することが可能になりつつある．このようなシミュレーションを進めて地殻活動を予測するシステムを創ろうという試みを紹介する．

地球の計測と地震・火山噴火予知

地球の表層は，マントル対流に起因するプレート運動のため，特にプレートの境界付近で激しい地殻変動を引き起こし，その結果蓄積したひずみの解放過程として大地震が発生したり，マグマ活動の結果として火山噴火が発生する．日本列島はまさにこのようなプレート境界に位置しているため，地球表層の変動のメカニズムと地震・火山噴火の発生過程の関連を明らかにするための絶好のフィールドになっている．防災の立場からは，このような現象を理解してその発生を予測することが極めて重要であることは，最近の神戸地震や有珠山噴火の例をあげるまでもなく，明らかである．

地学現象を理解するためには地震や電磁気等の地球物理学的探査が行われるが，より直接的に地表の変動を計測する手法が近年急速な進歩を見せている．その中の一つにGPSがある．

GPSの技術

GPS（Global Positioning System; 全地球測位システム）は「カーナビ」でおなじみの，人工衛星を使った位置計測システムである．主たる目的は船や車の高精度の位置決めであるが，衛星からの信号をうまく利用することで地球表面の微細な（1，2 cm程度の）変位を計測することが可能になってきた．GPS衛星は図-1に示すように地球上の高度約20 000 kmを周回する24個の衛星から構成され，地上からは常に4衛星以上が見えるように配置されている．

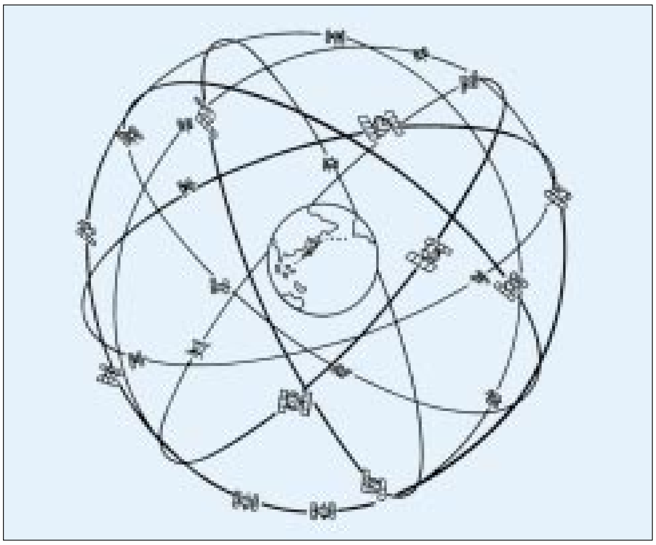


図-1　GPS衛星の軌道（日本測地学会編著「新訂版GPS」[1)]）

GPS衛星からはL1帯（約1.6 GHz）とL2帯（約1.2 GHz）の20 cm前後の波長を持つ搬送波に，民生用のC/Aコードと軍用のPコードと呼ばれる疑似雑音符号が重畳されて射出されている．2つの搬送波が用いられているのは電離層の影響を補正するためである．コードを用いた単独測位が最も簡便であり，カーナビなどに用いられているが，図-2に示すように，搬送波を用いて相対測位を実施することにより，位置のあらかじめわかっている基準点に対する観測点の位置が1，2 cm程度の精度で計測される．このような方式を干渉測位と呼び，地球上に多数の観測点を設置して継続的に位置測定を行うことで観測領域の地殻変動を面的に知ることができるのである．

GPSで見た日本列島の地殻変動

国土地理院は，1995年の神戸地震などを契機として，全国に約1 000点のGPS観測点から構成される観測網を構築し，毎日観測点の高精度座標を推定している．図-3は1996年から1998年までの2年間のデータをもとに1年あたりの変位速度を求めてベクトルで図化したものである．この図を見て印象的なのは日本列島の太平洋岸が西あるいは西北方向にむかって変位しており，それ

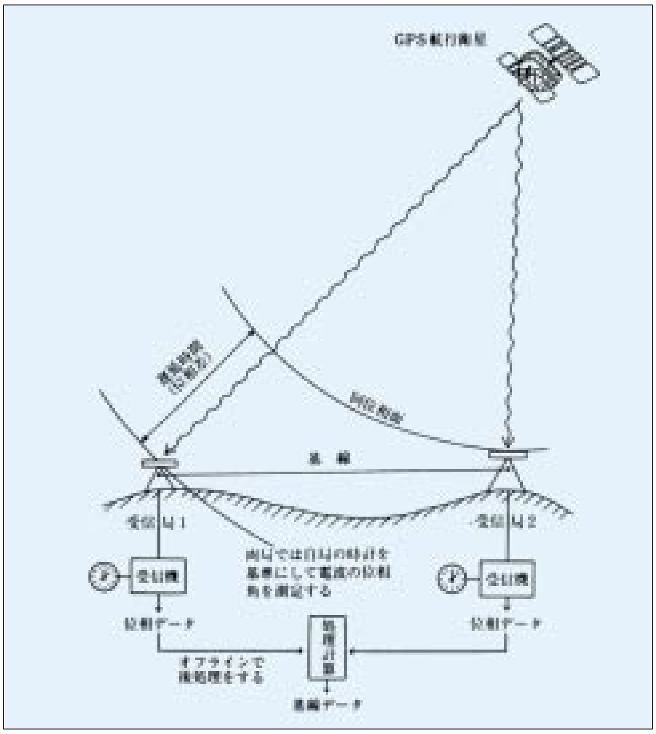


図-2　GPS干渉測位の基本原理（日本測地学会編著「新訂版GPS」[1]）

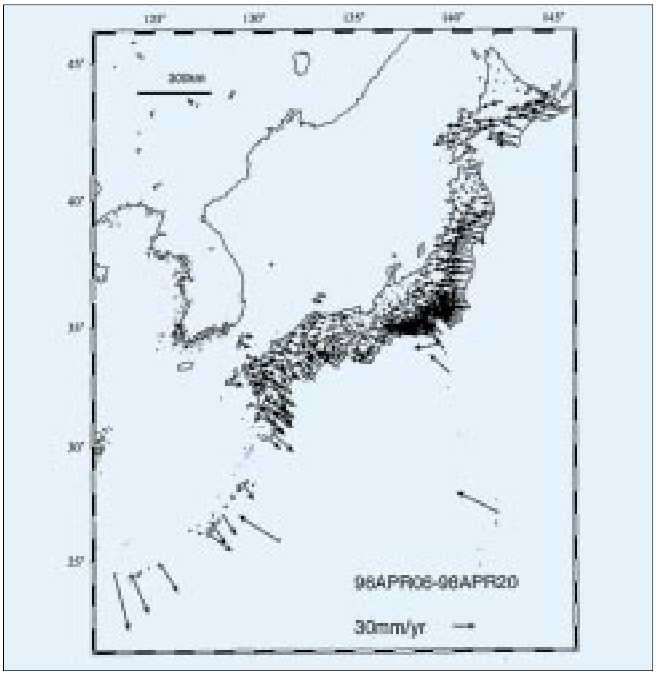


図-3　GPS全国観測網による日本列島の変位速度マップ（国土地理院，1999[2]）

が，内陸から日本海側に移るにつれて急速に減少していることである．これがまさに太平洋から日本列島の下に沈み込むプレートの運動の影響なのである．

こうして，日本列島の変位速度の場がプレート運動の帰結として明らかにされたのである．今後時間が経過するにつれ，変位速度の場の空間分布が時間と共に変化していく様が明らかになるであろう．すでにそのような一例として，プレート境界で地震が発生することなく，ゆっくりすべる現象（サイレント地震などと呼ばれている）が房総半島付近や日向灘付近で発見されている．

シミュレーションによる地殻活動予測と「地震研モデル」

日本には，GPSによる地殻変動の資料だけでなく，世界に類を見ないほど多種でかつ長期間の地震や詳細な地殻構造のデータの蓄積がある．これらの計測データに基づいて地殻活動を予測し，大地震を予知することはできないだろうか？

これまで日本の地震予知研究への取り組みは，その多くをデータの蓄積に費やしてきた．理論的なアプローチもあったが，理論は一般に対象を単純化し過ぎており，直ちにデータを取り込んで予測に役立てることはできない．そこで，理論と観測をつなぐものとして数値シミュレーションによって地殻活動（地震発生の潜在可能性や確率）をモデル化し予測に役立てようという試みが現れた．

数値シミュレーションにもさまざまなものがあるが，ここでは実際の観測データ，特に予測に必要な変動データをシミュレーションに常時取り込みつつモデルを改良するという，いわゆる「データ同化」の手法を取り入れることを考える．「データ同化」とは，すでに天気の数値予報で用いられているのと同じ手法であり，ある時刻の空間データを初期値として，ある時間後の予測値を求め，予測値とその時点で得られた観測値の両方を用いて，その時刻での最も確からしい値を求め，それを再び初期値として，先を予測する，という方法でモデルを逐次改良していく手法である．

地震は地殻内部に蓄積される応力が破壊強度に達したときに発生する破壊現象であるから，地表の変動データから地殻の応力変化が継続的に推定できれば，上記のような手法を用いて，応力状態を監視しつつ，少し先の応力状態や地震発生確率変化を予測することが可能であろう．地殻ひずみ変化率から応力変化を推定する逆問題の解法に関しては，最近新たな手法が提唱されている[3]．この方式では列島を2次元の薄い弾塑性材料と考え，平面応力状態を仮定する．ひずみを弾性ひずみと塑性ひずみの和に分解し，塑性ひずみに関しては面積変化がないとの仮定を置くと，つりあいの条件から列島内部の応力を境界値問題として定式化することができる．列島の内部と境界において変位と応力がそれぞれ与えられればこの問題を解くことができ，列島内部の応力分布や場所ごとのひずみ－応力の関係（構成則）を推定することが可能である．したがって，実際の地殻変動データを初期デ

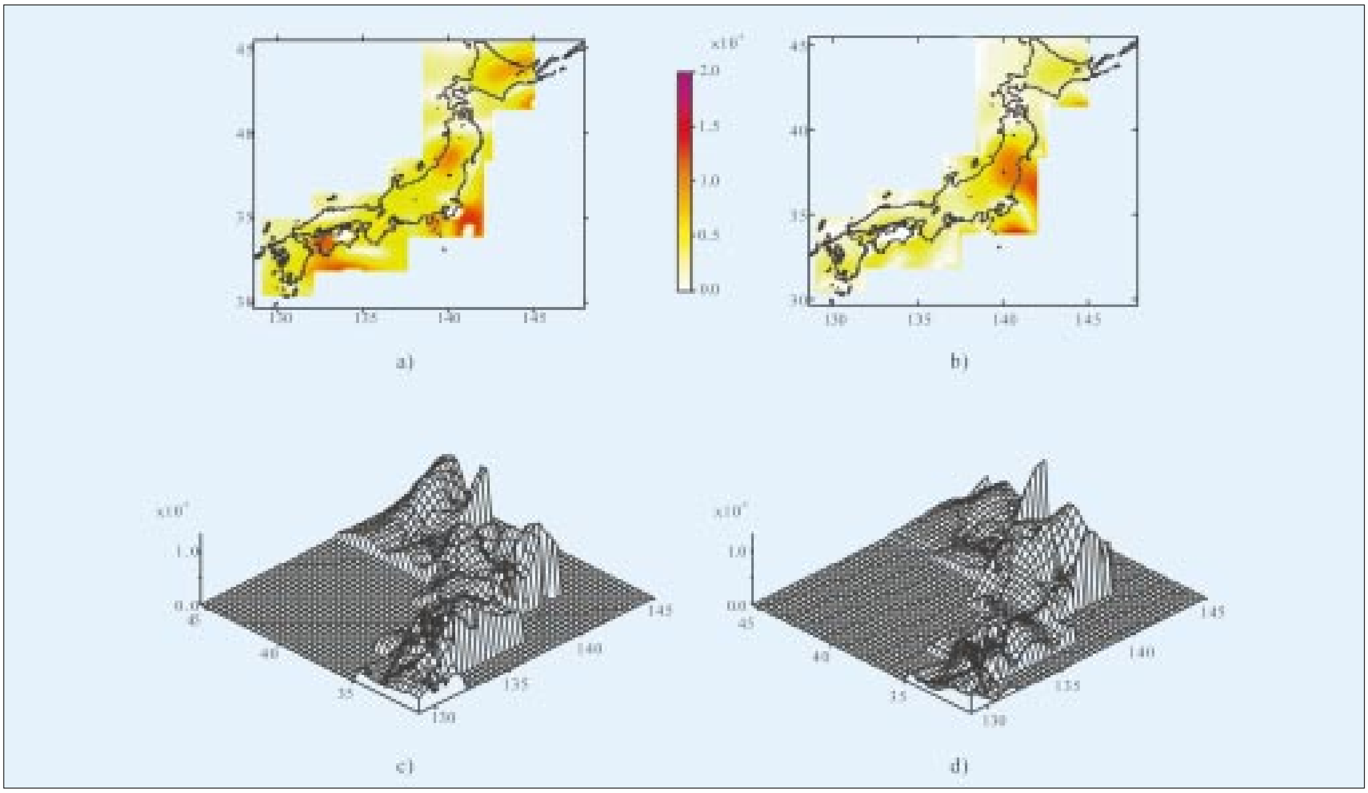


図-4　図-3の変位速度分布から推定した日本列島のせん断ひずみ分布（a)とc)）とせん断応力分布（b)とd)）（堀，2000[3]）

ータとして，例えば年単位程度で応力変化を推定して次年度の応力を予測し，実際の地震活動の変化や大地震の発生との比較によって予測結果を検証しつつ予測モデルの改良を行うことが可能となるだろう．この手法を繰り返すことによって日本列島の地殻活動や地震発生確率の予測精度を高めていこうという試みを少しずつではあるが進めており，われわれの研究所の名前をとって「地震研モデル」などと称している．このような数値シミュレーションの成果は，次のステップとしてより高度な観測計画にフィードバックされることになるだろう．数値シミュレーションの導入が日本の地震予知研究に新たな展開をもたらすことを期待したい．

参考文献

1－日本測地学会編著：「新訂版GPS－人工衛星による精密測位システム－」，（社）日本測量協会，272pp，1989
2－国土地理院：GPS連続観測から求めた全国の水平地殻変動速度，地震予知連絡会会報，555-573, 1999
3－堀宗朗：GPSアレイを利用した列島の応力増分分布や地域の構成則の推定について，地震研究所彙報，2000（印刷中）

水～土連成をめぐる最近の話題

浅岡　顕 Akira ASAOKA
正会員　工博
名古屋大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻

水～土連成解析

ダルシー則の流速も有効応力も，これらの定義だけを見ると，土質力学はMixtureの力学かと思わせる．しかし，水～土連成解析というときは実はそこまで一般的ではなくて，単に土骨格を土骨格の体積変化に関する制約条件付きで解くということだけを意味する．これは非排水解析を考えるとわかりやすい．非排水解析ではすべての物質点で等体積の制約がかかり，これを可能にする束縛力の，その反力は非圧縮の水がとる．すなわち過剰水圧である．水はこの束縛力を与える装置に過ぎず，したがって，水が非圧縮なことは，土質力学では本質的な要請である．そして解いているのは土骨格だけで，水は「解かない」．圧密では，体積変化を許さぬという拘束は

ダルシー則によって時間的に徐々に緩和される．しかし土骨格を解いているだけで水を解かないのは上と同じ．つまり，その土が今どこにあるかは大いに注目して計算する一方で，その水が今どこにあるかは誰も考えようとしない．

水〜土連成解析によって明らかになったとても重要な点は，土骨格の構成関係を直接観察できるような実験は，ほとんどないということである．標準圧密試験がエレメント試験でないことは昔から周知だが，最近多用される定率ひずみ漸増載荷圧密試験でもこれは同じ．この試験が均質なエレメント試験たり得るためにはほとんど無限の時間がかかって，まるで話にならない．また，非排水 3 軸試験も，端面摩擦が災いして，速くやれば間隙水圧がバラバラ，遅くやると間隙比がバラバラになって，どうやってもエレメント試験にはならない．排水 3 軸試験では，やはり無限に時間をかけないと近似的にも均質性は保てない．しかしそのようなことでめげたりはせずに，これまで研究者は非排水 3 軸試験のマクロな結果からでも，想像を逞しくして土骨格の弾塑性構成式を編み出してきた．ところがその構成式を使って，3 軸試験を水〜土連成の境界値問題として解くと，何とはなく，その構成式で良かったことになるから不思議である．3軸試験についてはその寸法等を決めた Bishop の天才としか言いようがない．圧密試験と 3 軸試験の例を一二紹介するが，その前に土骨格の弾塑性構成式に触れておく．

土骨格の弾塑性構成式

限界状態土質力学は，軟化と塑性膨張を，また硬化と塑性圧縮を分かちがたく結びつけて，しかもその分水嶺となる応力比 q/p' を一定値 M で与えた（$q=Mp'$ は限界状態線（C.S.L.）と呼ばれる）．粘土を十分に練り返して正規圧密状態にして，それからこの土を負荷すれば，その土は概ねこのモデルに従う．しかし一般の土は，砂も粘土も構造を持っていて，しかもなにがしか過圧密であることが普通だから，正規圧密練り返し土の構成式ですべての土を近似するのは，いかにも無理がある．例えば構造の発達した自然堆積の粘土では，M 以下の低い応力比の下でも塑性圧縮を伴う軟化が起こるし，よく締まった砂では，M 以上の高い応力比のもとでも，塑性膨張を伴う硬化が見られる．ところが，過圧密粘土ではこの塑性膨張を伴う硬化は長く続かず，すぐに軟化に転ずる．以上で M は，塑性膨張と塑性圧縮の境の応力比．つまり実際の土では，①硬化・軟化は，塑性圧縮・塑性膨張とは切り離して考えねばならない．また，塑性圧縮・塑性膨張の境の応力比 M は簡単のために一定としても（今は異方性の発展は議論しない），②硬化と軟化の分水嶺になる応力比は，塑性変形の進展とともに変化する．その度合は，砂と粘土で著しく異なる．

さてしかし，硬化・軟化を塑性圧縮・塑性膨張と切り離して考えると言っても，体積変化が土の力学挙動を支配することに変わりはなく，体積変化は水が出入りしてはじめて可能となる．したがって，水〜土連成が土質力学の本質であることに何も変わりはない．

塑性圧縮を伴う軟化

図-1 は，構造が発達した過圧密な自然堆積粘土を厚さ 2 cm の標準圧密試験機に詰めて，上端排水・下端非排水の境界条件で，定率ひずみで漸増載荷したときの1次元圧縮挙動を示している．間隙比と言ってもこれは供試体全体の平均値で，鉛直有効応力も実際には単位面積当たりの鉛直荷重のことである．図-1 は，本当は荷重〜変位曲線だが，土質力学の慣習上「応力〜ひずみ曲線」と呼ぶことになっている．ひずみ速度が違うと別の曲線が出て一大事のように思う人もいるが，これは単に水がしみ出るのに抵抗がかかるだけのことで，大した意味はない．この土の，本当の 1 次元圧縮での応力〜ひずみ曲線は図-2a に示す．図-1 とはまるで異なっているが，確かに圧縮を伴う軟化が見て取れる．図-1 の室内試験で

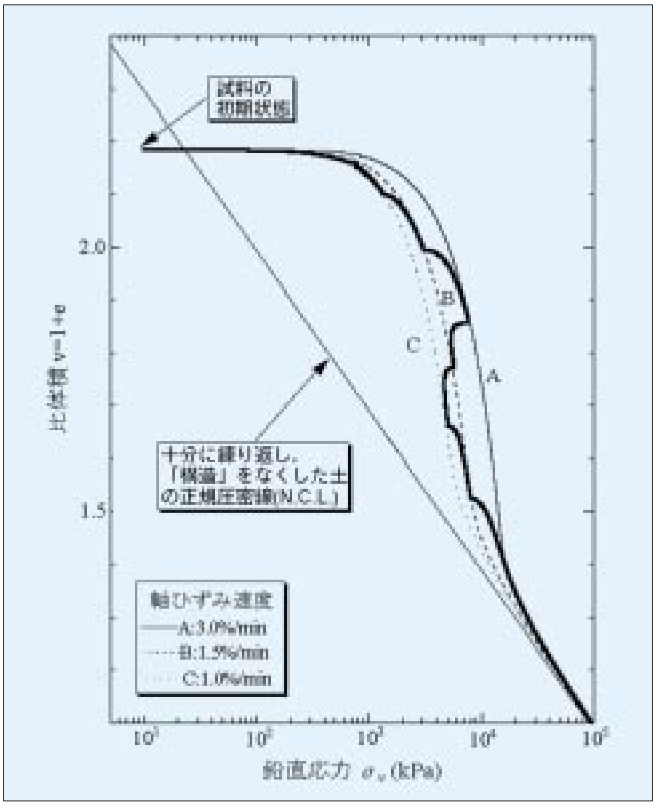


図-1　定率ひずみ漸増載荷の1次元圧縮挙動

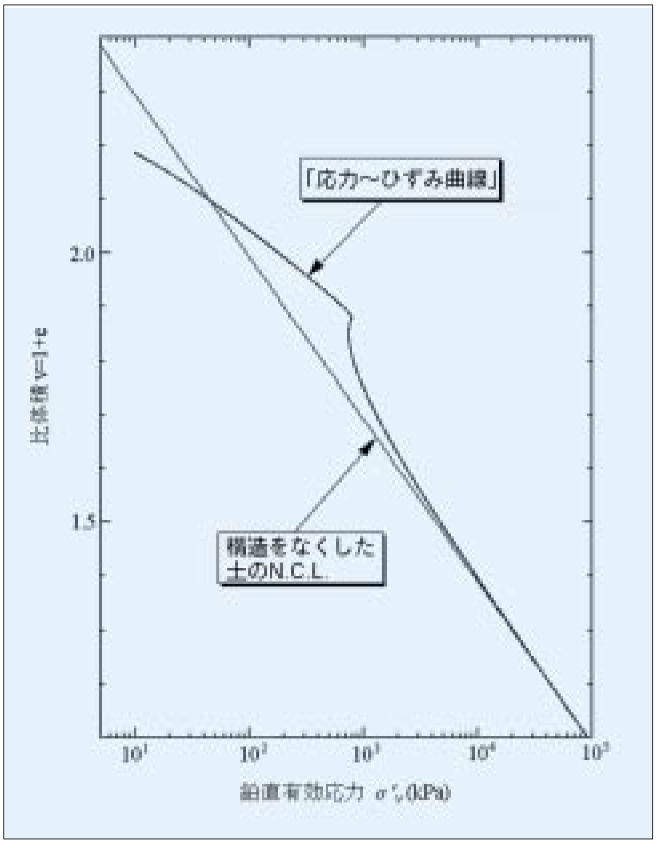


図-2a　1次元圧縮条件下での応力～ひずみ曲線

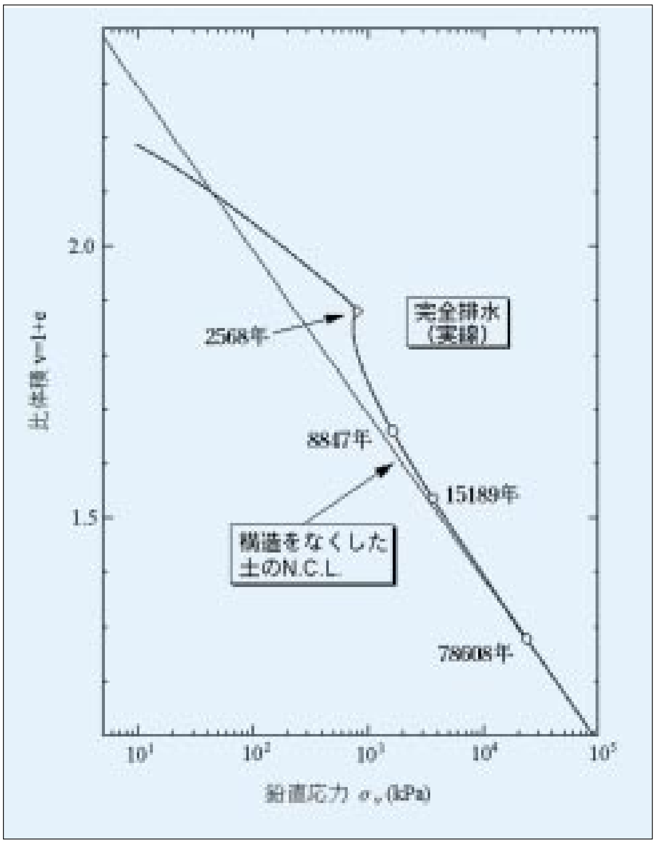


図-2b　1次元圧縮条件下での「完全排水試験」

「定率ひずみ」をどれくらい遅くやれば図-2a が得られるかを示したものが図-2b である．図-2b では，念のため倍精度の有効数字で図-2a に合わせたが，そんな精度を得るためには 7 万年以上もかかってしまう．精度など問題にしないと言うのであれば，何か月かの試験で，図-2a と雰囲気だけよく似た曲線が得られるが，もうそれだけのことである．図-1 の試験を見て，想像力を逞しくして，水～土連成の計算によって図-2a を求めるというのが，本来の土質力学の手筋である．

1 次元圧密で粘土層のどこかの深さで塑性圧縮を伴う軟化が起こると，そこでは間隙水圧は消散ではなく湧き出しが起こる．塑性変形がさらに進展して軟化が硬化に転じるまでは過剰水圧は消散しないから，遅れ圧密沈下が起こる．図-1 の試験で荷重を一定に保ったときの過剰水圧分布の例を図-3 に示す．2 次圧密は実務上も重要なので，この例を挙げた．

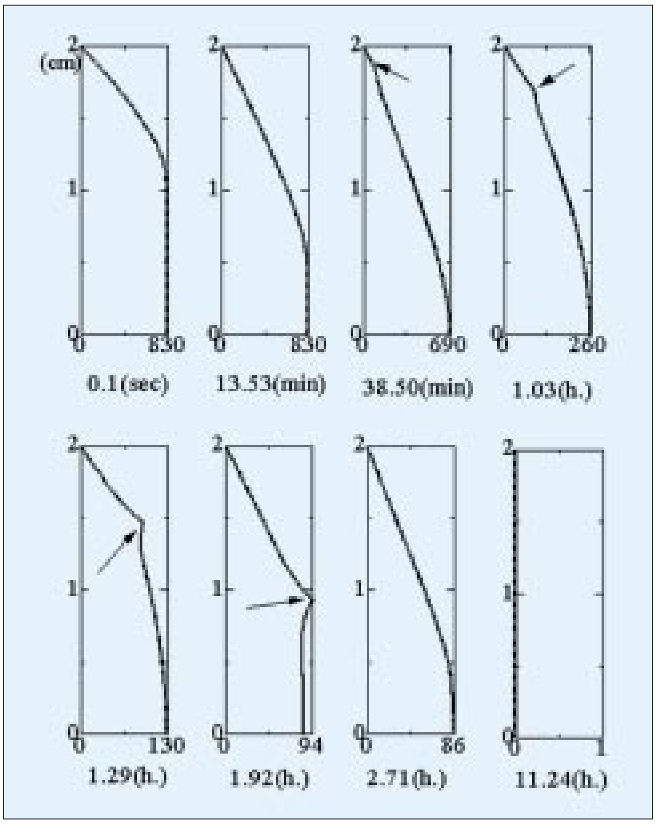


図-3　過剰水圧の等時曲線（単位：kPa，矢印付近：水圧の湧き出し）

砂と粘土の非排水せん断挙動

図-4 はゆる詰め砂，図-5 は過圧密粘土の，3 軸試験機によるせん断挙動を示したものである．実験と計算の両方を示している．ここでも 3 軸試験をエレメント試験と見立ててデータ整理しているが，これは図-1 と同じ．「応力～ひずみ曲線」を合わせれば「有効応力経路」が合いにくく（図-4），「有効応力経路」を合わせると「応

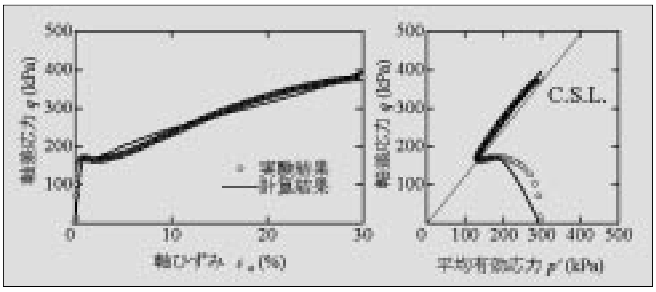


図-4　ゆる詰め砂の非排水せん断挙動の実験と計算

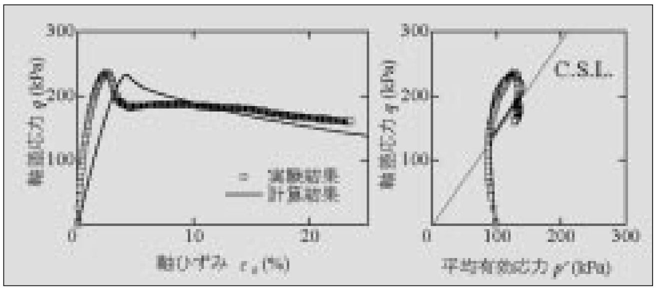


図-5　過圧密粘土の非排水せん断挙動の実験と計算

力〜ひずみ曲線」が合いにくい（図-5），そのような例に受け取られがちだが，もちろんそれは本意ではなくて，ぴったり合わせると図が見にくくなるからだけのことである．真の応力〜ひずみ曲線や真の有効応力経路が別にあるのは，これも図-1，図-2a の対比と同じ．真の何々は，正しい実験と想像力と計算とによってのみ求まる．直接見ることはできない．

FEM と最適化ツールの組み合わせによる橋梁構造の設計の試み

三木千壽　Chitohi MIKI
フェロー会員　工博
東京工業大学教授　工学部土木工学科

単純な疑問

有限要素法解析（FEM）は多くの大学で学部レベルの標準的なカリキュラムに含まれており，すでに土木工学分野での基礎的な知識の一部になっている．また，実務においてもさまざまな分野で，FEM による構造解析はきわめて日常的に使用されるようになってきた．しかし，橋梁の設計においてはいまだに骨組み解析を基本とした断面設計が行われ，FEM の応用は特殊な構造ディテールを採用する際の応力照査などに限られている．場合によっては，FEM に関する高い知識を有する人材が橋梁設計に携わるために，わざわざ骨組み解析やその際に用いるさまざまな便宜的な取り扱い，例えば，断面係数，床版の有効幅，横桁を介しての荷重分担，床版の荷重分担などを勉強し直す必要が出てくる．

橋梁設計の分野においては，コスト縮減を目的とした，いわゆる合理化構造の議論が盛んであるが，そのベースは従来の設計方法であり，構造システムとしてはさほどドラスティックな変化は現れていない．なぜだろうか，せっかくすばらしい道具を持っているのだから，その使い方を研究してみたらどうか，構造システムの合理化は，その構造体の力学的な挙動の正確な把握の先にあるのであり，実際に生じる変位や応力が設計計算による値と 50 %程度しか合わないような[1] 道具を使い続ける限り，なかなか新しい構造は生まれてこないのではないだろうか，最新のツールをどうにか橋梁設計の実務に持ち込めないか，というのがこの研究の原点である．

すでに道具は揃っている

筆者のグループでのこの分野の研究は，汎用 FEM コードをベースにした，力ずくの最適化計算から始まっている[2]．すなわち，プレートガーダ橋で，主桁のフランジやウェブの板厚など，パラメータの数が限られている場合は，考え得る組み合わせに対して断面設計を繰り返し行い，最適値を探すことも可能である．また，そこに設計者の経験的知識を加味することにより収束を早めることも可能である．しかし，パラメータが増えてくるとそのような方法ではすぐに限界にぶつかり，数理計画法に基づいた最適化手法の適用が有効になってくる．

この分野にどのような道具があるかについては，例えばインターネットによる検索を行うと驚くほどの多種多様なソフトが出てくる．ここではそのようにして見つけた最適化ソフト iSIGHT を使っている．図-1 に最適化の流れを示す．すなわち，設計計算は FEM モデル作成コード PATRAN と解析コード ABAQUS をリンクさせ，設計照査は自前の FORTRAN 等のコードを準備する．設計計算の入出力は iSIGHT の中で受け渡しされ，各入力

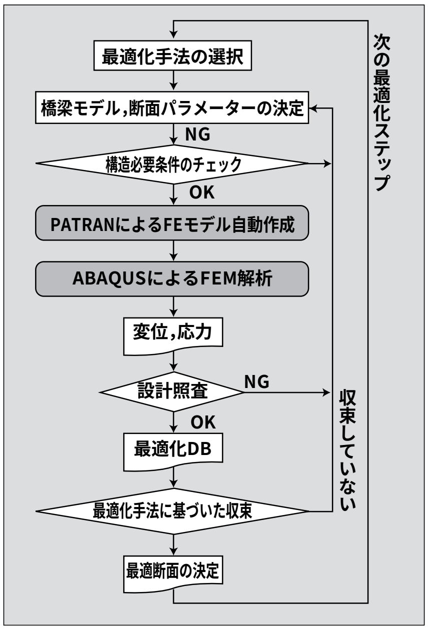


図-1　最適化の流れ

データは自動的に更新される．最適化を行うためのパラメータ，目的関数の変化は，データベースに記憶され，最適化ルーティンに基づきデータベースが解析される．収束した場合は次の最適化ステップに移行する．本研究では最小重量を最適化の基準としている．鋼橋の価格はほぼ重量で決定できると言える．また，橋梁の各構成要素に単価を加えれば，ここでの最小重量ベースの最適化計算を最小価格ベースのそれに変えることは容易である．

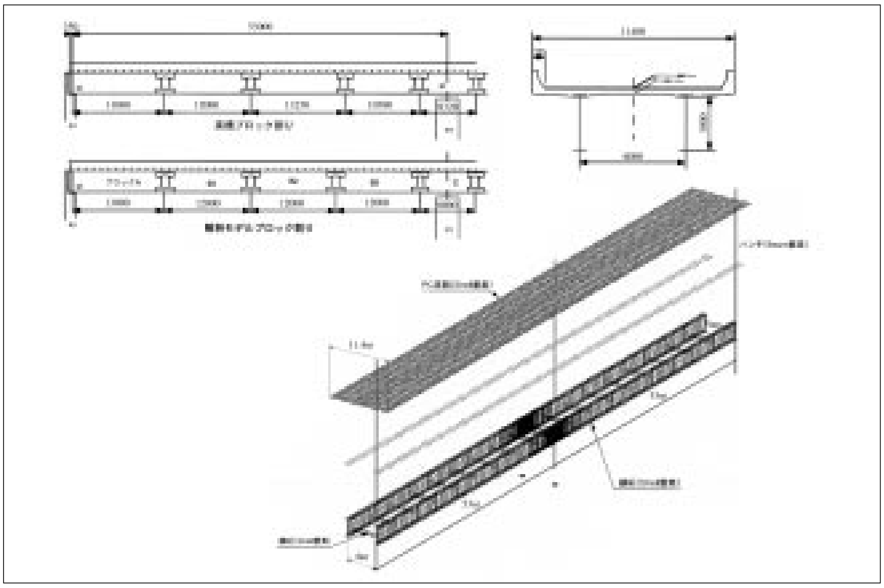


図-2　対象橋梁モデル

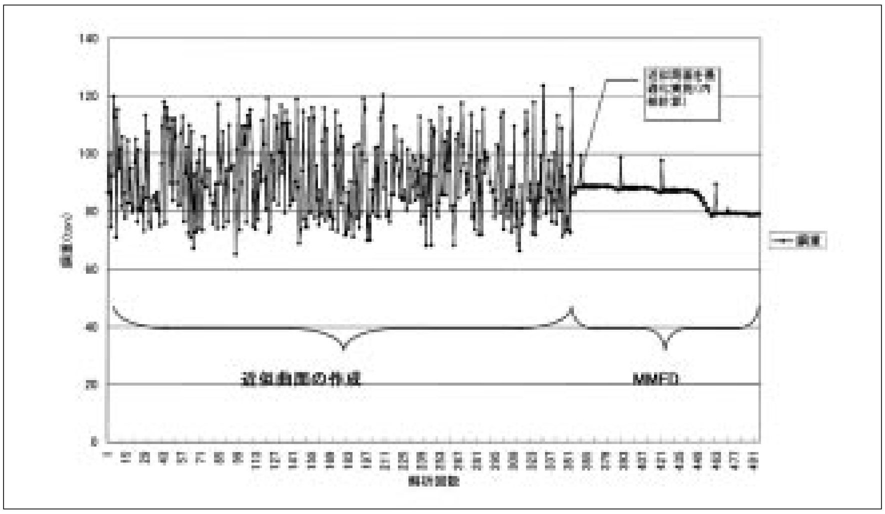


図-3　最適化過程

例　　題

図-2 に例題とした橋梁とその FEM モデルを示す．例題の橋は，わが国で初めての合理化橋梁と言われているホロナイ橋をベースとしている．しかし，橋梁のブロック割は，実橋とは若干異なり 1 径間を 5 ブロックとしている．最近のいわゆる合理化桁の設計にならい，1 ブロック内 1 断面と仮定すれば，断面パラメータとしては上・下フランジの板厚と幅，およびウェブ板厚が 5 断面分で 25 と桁高 1 の計 26 パラメータとなる．FEM を橋梁設計に持ち込むというと，従来は影響線を用いて検討していた活荷重の載荷パターンの検討が非常に大変になるとの声が上がるが，いわゆる合理化桁で行われている 1 ブロック 1 断面という仮定をおいた瞬間にこのような指摘が的外れであることに気がつくであろう．

ここでの FEM 解析モデルの要素数は約 10 000 で，床版，主桁，横桁にシェル要素を用いている．ウェブの要素分割は一般部で高さ方向に 5 分割，中間支点部近傍で 20 分割している．水平補剛材，垂直補剛材ともシェル要素でモデル化している．断面照査の詳細についてはここでは割愛するが，荷重・抵抗係数設計法の考え方[3)]を適用し，架設時と供用時の両方について，引張部材の降伏，圧縮部材の降伏と座屈およびたわみに対する照査を実施している．使用鋼材は，実橋では SS400 から SM570 までを使い分けているが，ここでは SM490Y のみとしている．

最適化計算

最適化のステップごとに要素数約 10 000 の有限要素解析を行う必要があるから，いかに収束を早めるかが最適化計算の課題となる．どのような最適化手法が適して

いるかについては現在のところ模索段階であるが，ここでは図-3 に示すように，まず，近似解法によって大局的な解の探索を行い，その後，直接法により最適解を探る2段階の探索を行った[4]．

直接法としては，修正実行可能方向法（MMFD）を適用している．近似解法は 26 パラメータに対して 351 回の FEM 解析を繰り返して近似曲面を作成し，その近似曲面に外点法を適用して大局解を求める．その後 MMFD 法により同じ FEM 解析を 100～300 回実施し，この過程を計 3 回繰り返して最終的な解を得ている．筆者の研究室の標準的なワークステーションで 1 回の FEM 解析が約 5 分，データの解析や要素の再分割などを含めると 1 ルーティンが約 6 分であり，1 500 ルーティンとすると約 9 000 分が所要時間となる．もちろんこれらの計算はすべて自動で実施されるため，途中何も手を加えるあるいは考えることはない．

解析結果

図-4 に解析結果の概要を示す．ホロナイ橋は非合成桁として設計され，そのため水平補剛材が最大 2 段まで使われていること，鋼材の使い分けをしていること，しかも最小重量を合理化の基準にはしていないことなどから，直接的に比較することには問題があるが，今回の最適化計算で大幅な鋼重の減少が実現できていることがわかる．上フランジでは，合成効果のために中間支点部断面を除いて大幅な鋼重減となっている．ウェブについては，水平補剛材なしとした場合，鋼重は実橋より 20 % 程度増加し，一段配置すると実橋と同程度となる．下フランジについては，支間中央部では実橋とさほど変らず，端部および中間支点部での鋼重の減少が目立つ．ここでの結果は今後解決すべきさまざまな課題を含んだものであり，構造設計といった立場からそのディテールについて議論できる段階ではないが，このような手法でそこそこの解が得られること，また，従来法とは異なったプロポーションの構造が出現する可能性については結論として言えるだろう．

これからの課題

ここで示したような FEM 解析をベースとした橋梁設計を実施するには，例えば局部応力に対してどのような基準応力で照査すれば良いのか，ウェブなどの局部座屈はどう考えるのかなど，今まであまり気にならなかったことが重たい課題となってくる．ここではかなりの割り

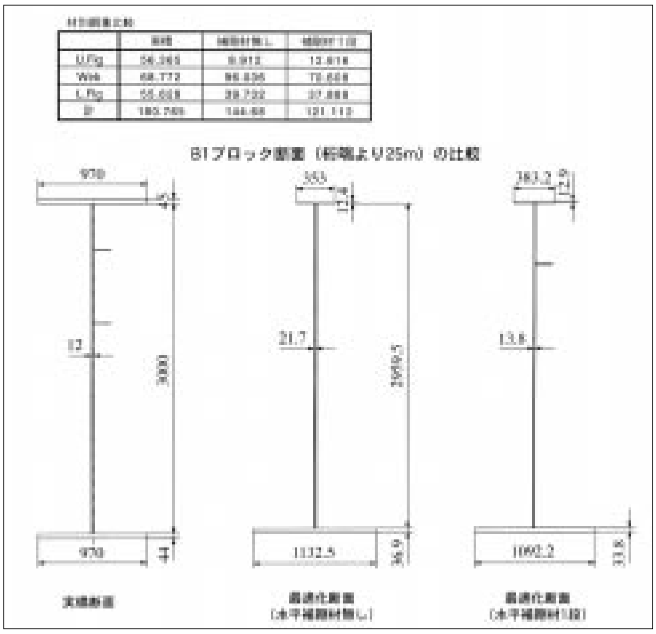


図-4　解析結果

切りで計算を進めているが，今後解決しなければならない問題は多い．また，最適化計算についてもとりあえず動かしてみたというのが実情であり，改善の余地は大きい．ここでは ABAQUS と iSIGHT を組み合わせているが，もちろん他のソフトの組み合わせも考えられる．さまざまな，しかも複数のプログラムコードをリンクさせることにより，従来実現が困難であったような設計シミュレーションが可能になる，また構造物の開発において大きな可能性をもたらすことが，ここで最も強く伝えたいことである．

ここで示したような方法を個々の橋の設計に適用することには．さまざまな議論があるだろう．しかし，標準的な幅員，スパンの橋について，このような方法により最適化された構造を用意しておくことも橋梁の合理化の支援につながると考えている．また，この数年のコンピュータの性能アップを見ていると，ここでの計算がいわゆるパソコンで容易に実施可能となる日も近いような気がしている．研究の進展と実務との乖離をどのように防ぐかか課題であろう．筆者は最新のツールを用いたと称しているがこれはひょっとしたら勉強不足であり，もっと良いツールがすでに使われているかもしれない．

参考文献

1－三木千壽，山田真幸，長江進，西浩嗣：既設非合成連続合成桁端の活荷重応答の実態とその評価，土木学会論文集．No.647／I-51，pp.281-294，2000.4

2－小西拓洋，三木千壽：高強度鋼の適用による鋼橋の合理化設計の可能性，土木学会論文集，投稿中

3－鋼橋技術研究会，限界状態設計法研究部会：限界状態設計法の書式による鋼道路橋設計指針，1998.12

3－本州四国連絡橋公団：鋼上部構造の設計にFEM解析を適用するためのガイドライン（案），1993.9

4－茨城俊秀，福島雅夫：情報数学講座14，最適化の手法，共栄出版，1993

高流動コンクリートのレオロジー解析

スランプフロー試験で何が測れるのか

小門　武　Takeshi KOKADO　正会員　工博
新日本製鐵（株）建材開発技術部
細田　尚　Takashi HOSODA　正会員　工博
京都大学大学院助教授　工学研究科　土木工学専攻

高流動コンクリートと連続体力学

高流動コンクリート[1]が高い充填性を発揮するためには，高い流動性と適度な粘性とを併せ持つことが必要[2]とされる．高流動コンクリートの流動性を評価する指標として主にスランプフロー値が，また，粘性の評価指標としてフロー到達時間やロート流下時間[1]などが，実験室，現場を問わず広く用いられている．

高流動コンクリートの配合設計や品質管理をより合理性のあるものとし，さらに，型枠の隅々まで充填可能であるかどうかを評価するためのコンクリート充填性解析技術を発展させるためには，高流動コンクリートの流動や変形に関する特性，すなわちレオロジー特性を把握するとともに，スランプフロー値やフロー到達時間などの評価指標とレオロジー定数との関係を定量的に明らかにしていくことが必要である．

最近，連続体力学に基づいた理論解析ならびに数値流体解析を通して，スランプフロー値およびフロー到達時間とレオロジー定数との関係を明らかにしようとする研究が進められている．その概要を紹介する．

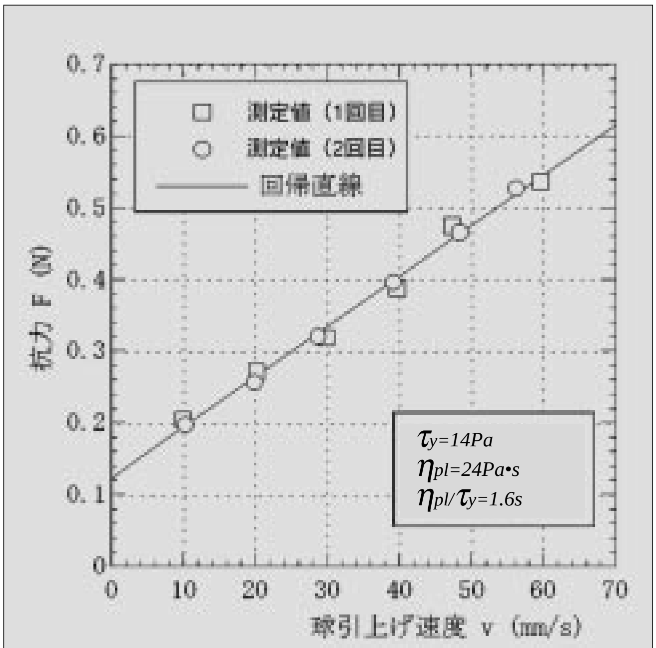


図-1　球引上げ粘度計による高流動モルタルのレオロジー特性測定例

高流動コンクリートのレオロジー特性

高分子溶液などのレオロジー特性の評価に用いられる回転粘度計は，フレッシュコンクリートのように水とセメント・骨材などの固体との固液分散系にあっては，回転する円筒壁面に水膜が形成され，この水膜によるすべり層を介したトルクが測定されるため，フレッシュコンクリートのレオロジー測定には適していない．

球引上げ粘度計は，落球粘度計を応用したもので，異なる速度で鋼球を引き上げ，それぞれの引上げ速度 v と引上げ荷重（＝抗力）F との関係を求めるものであり，すべり層の問題は生じない．市販の部品を使って容易に組み立てることができるが，フレッシュコンクリートに適用する場合，骨材寸法に比して3～5倍以上の大きさの鋼球を用いる必要がある．

図-1は，高流動コンクリートから粗骨材を除いた高流動モルタル中を，直径 D が31.75 mmの鋼球が引き上げられる際の，引上げ速度 v と抗力 F との測定結果[3]を表わす．引上げ速度と抗力との間には，ほぼ直線の関係が認められる．

一方，Ansleyらは，Bingham流体における抗力 F と降伏値 τ_y および塑性粘度 η_{pl} との関係を表す式(1)を導いている．

$$F = 3\pi\eta_{pl}Dv + \frac{7}{8}\pi^2 D^2 \tau_y \tag{1}$$

式(1)は，Bingham流体では，球の直径，降伏値および塑性粘度が一定の場合には，抗力は球の引上げ速度に比例することを示している．

したがって，高流動モルタルはBingham流体として取り扱うことができると判断される．さらに，引上げ速度と抗力の測定値から，式(1)に基づいて，最小二乗法により直線回帰して降伏値と塑性粘度とが求められる．

スランプフロー値と降伏値との関係

流体の運動は一般に，連続の式と運動方程式とによって表わされる．スランプフロー試験におけるコンクリートの流動を対象とする場合には，スランプコーンの中心を原点として放射線上に拡がる軸対称流れとして取り扱うことができる．また，フレッシュコンクリートは非圧

縮性とみなせる．

水平面上に設置されたスランプコーンの軸方向に z 軸，半径方向に r 軸をとった円柱座標系（r，θ，z）で表わされる運動方程式（r 方向成分）を，

① 連続の式を満足する

② 表面には応力が働かない，すなわち，表面に作用する応力ベクトルは 0 であると仮定する

③ 底面からの高さ z における圧力は静圧分布と仮定する

という条件のもとに，底面から試料表面の高さ h まで積分する．さらに，コンクリートが流動後静止した状態に着目すると，底面に作用する応力ベクトルの r 方向成分は降伏値 τ_y に等しいと考えられるので，スランプフロー試験でコンクリートが流動後静止した状態における試験体の高さ分布を表す式 (2) が導かれる[4)]．

$$\frac{h^2}{2} = (L - r)\frac{\tau_y}{\rho g} \tag{2}$$

ここに，L：静止後の試験体の中心から端部までの距離，ρ：コンクリートの単位容積質量，g：重力加速度である．

式 (2) は，スランプフロー試験における試験体の高さ分布は放物線を描くことを示している．この関係から，コンクリートの降伏値 τ_y は，スランプフロー値 Sf（$=2L$）と試験体の容積 V の関数として，理論式 (3) によって表わされる．

$$\tau_y = \frac{15^2 \rho g V^2}{4\pi^2 Sf^5} \tag{3}$$

図-2 は，球引上げ試験から求められた粉体系および増粘剤系高流動モルタルの降伏値[3)] と理論式 (3) とを比較したものである．なお，スランプフロー試験は，球引上げ試験の開始時と終了直後に行なわれている．また，理論式 (3) は，単位容積質量 ρ を 2.2g/cm³，試験体の容積 V は全データ（32 ケース×2）の平均値 5.27 ℓ を用いてプロットされている．実験値と理論式 (3) とはよく一致しており，高流動モルタルの降伏値は，スランプフロー値の関数として理論式 (3)によって表わされることがわかる．

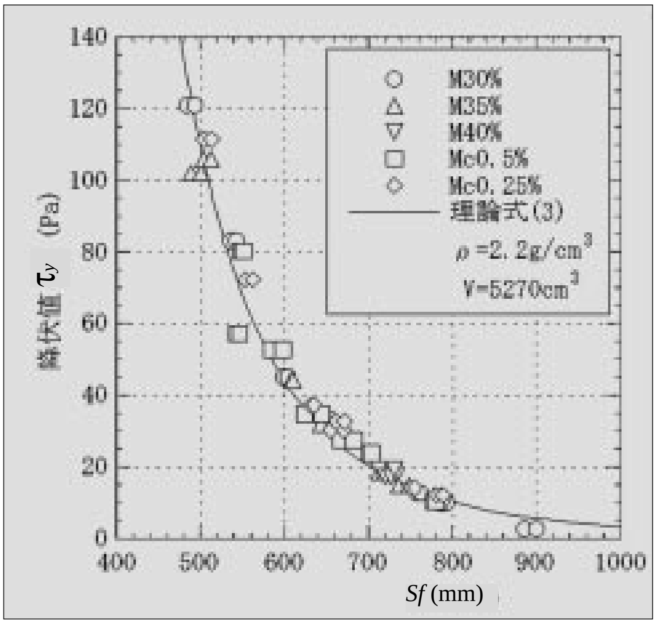


図-2　スランプフロー値と降伏値との関係

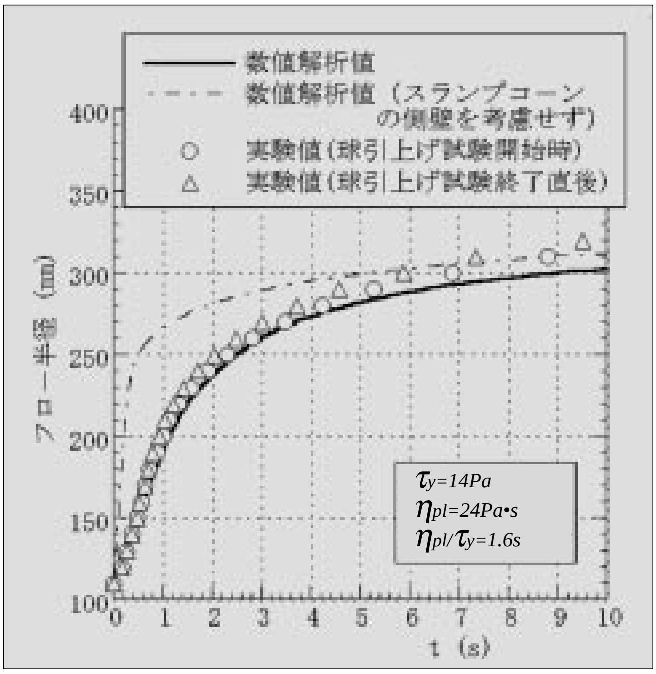


図-3　フロー半径と到達時間との関係

フロー到達時間と塑性粘度との関係

スランプコーンを引き上げてからコンクリートが流動する挙動は，数値流体解析によって求めることができる[5)]．解析条件に関する詳細な説明はここでは省略するが，スランプフロー試験を対象とする場合には，以下の 2 点について注意が必要である．

① 構成式：Bingham モデルでは，ひずみ速度が 0 の場合に応力が特定できない．そこで，ひずみ速度が小さい領域（＝ひずみ速度テンソルの 2 次不変量の平方根 $\sqrt{I_2}$ が0.03/s 以下）では，粘性が非常に大きい Newton 流体として取り扱う bi-linear モデルを用いる．

② スランプコーン側壁のモデル化：変形速度が大きい高流動コンクリートを対象とする場合には，引き上げられる途上でのスランプコーン側壁が流動の障害

として作用することをモデル化する必要がある．

図-3は，図-1に示した高流動モルタルを対象として，スランプフロー試験における試料の先端部が半径方向に拡がっていく状況について，実験値と数値解析値を比較したものである．なお，数値解析にあたり，レオロジー定数は図-1に示す球引上げ試験から求められた降伏値と塑性粘度が用いられている．スランプコーン側壁の影響を適切にモデル化することにより，スランプフロー試験における高流動モルタルの流動挙動を数値解析によって評価することが可能であることがわかる．

図-4は，数値解析によって与えられるレオロジー定数とフロー半径到達時間の関係を表わしている．フロー半径200 mm到達時間（t 200 Cal）に与える影響は塑性粘度が支配的であり，降伏値の影響はあまり受けない．一方，フロー半径250 mm到達時間（t 250 Cal）では，塑性粘度だけでなく降伏値の影響も受けることが示される．

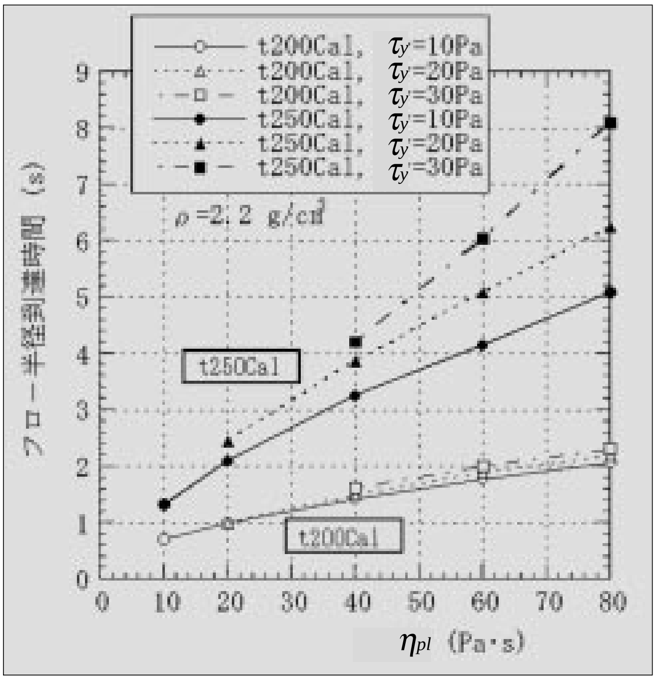


図-4　数値解析によって与えられるレオロジー定数とフロー半径到達時間との関係

今後の展開

連続体力学にもとづいた理論解析ならびに数値流体解析を通して，スランプフロー試験における高流動コンクリートのレオロジー定数評価法が示された．ただし，その妥当性の検証は高流動モルタルによって行なわれている．粗骨材を含む場合のレオロジー特性の把握とモデル化および適用性の検証は今後の課題であるが，上記知見が有効に活用できるものと考えられる．そして，レオロジー解析の進展により，高流動コンクリートの配合設計や品質管理がより合理性のあるものとなり，さらに，コンクリートのレオロジーと打設条件から充填性を評価する充填性解析技術が発展していくことが期待される．

参考文献

1－土木学会：高流動コンクリート施工指針，1998

2－岡村甫，前川宏一，小沢一雅：ハイパフォーマンスコンクリート，技報堂出版，1993

3－小門武，宮川豊章：スランプフロー試験による高流動コンクリートのレオロジー定数評価法に関する研究，土木学会論文集，No.634/V-45，pp.113-129，1999.11

4－小門武，細田尚，宮川豊章，藤井學：スランプフロー試験によるフレッシュコンクリートの降伏値評価法の研究，土木学会論文集，No.578/V-37，pp.19-29，1997.11

5－小門武，細田尚，宮川豊章：数値流体解析による高流動コンクリートのレオロジー定数評価法に関する研究，土木学会論文集，No.648/V-47，pp.109-125，2000.5

数値粒状体の役割

阪口　秀　Hide SAKAGUCHI
Dr.
CSIRO-オーストラリア連邦科学産業研究機構，
Division of Exploration and Mining-Solid Mechanics Research Group主任研究員

粒状体研究の歴史

粒状体の振るまいを力学的に理解しようとする試みは，土木，機械，金属，化学などの諸工学の分野の他，物理学，地質学，薬学などの分野においても，最近，活発に行われるようになってきた．だが，これは何も，今に至って特別に新しい材料が見つかったという意味ではない．例えば，砂や礫などの粒状体は，いつの時代にも地球上には豊富に存在してきた．もちろん，電子顕微鏡にも望遠鏡にも頼らなくても，手に取ってみれば肉眼で

容易に観察できる．ゆえに，粒状体は，太古より物質的に，また，概念的に，人間との関わりを持っていたのである．事実，数学者コーシーは，連続体力学の枠組みにたどりつく前に「粒子力学」なるものを真剣に考えており[1]，物理学者のファラデーも振動による砂の挙動の研究を行っていた[2]．さらに歴史を遡ると，すでに紀元前のギリシャ哲学の時代に，デモクリトスが弟子のレウキッポスと砂浜を連れ歩きながら，砂と水の挙動の類似と相違について議論したことが記録されている[3]．

ところが，今世紀，われわれは，分子や原子を直接操作して遺伝子を組み替えたり特殊な材料を作るようになった．また，地球の外に出て天体の観察をするだけでなく，惑星上で機械を動かすようにまでなった．しかし，一方では，いまだに砂を圧縮したり，揺すったり，流動させる実験を行っている．海の水の挙動は（解けるか否かは別として）ナビエ・ストークス方程式として記述されたが，海の砂については，まだ答えが見つからない．だから，「粒状体の力学に関する研究が最近活発になってきたかもしれない」と言っても，それは，デモクリトスとレウキッポスの議論が 2 000 年以上たってもいまだに延々と続いているということに過ぎないのである．否，2 000 年間続けられているのではなく，「熱中しては忘れ去り，熱中しては忘れ去り」を繰り返しているだけかもしれない．

連続体近似の限界

粒状体は，状態によって固体のような性質を示したり流体のような性質を示し，その中間的な存在として例えられることがある．しかし，固体や流体は連続体近似によってその力学的挙動が記述できるようになったのに対し，粒状体は本質的に不連続・不均質な材料であることが，問題を著しく難しくしている．ここで言う不連続・不均質性は，空間を占めている物質自体の幾何学的因子（固体部分と空隙部分の混在，粒子の材質，形状，大きさの違い，粒子間接触点の離散的存在など）の他，接触点のすべりや分離による変形が不可逆的であることに起因する力学的因子による．また，この不連続・不均質性は，対象とする領域の大きさと粒状体を構成する粒子の大きさに依存するが，個々の粒子の大きさや形そして運動が無視できないようなスケールであるとき，もはや連続体近似は困難を極める．連続体解析の中で解の分岐問題を扱う数値シミュレーションを行う際に，あらかじめ何らかの小さな人工的な撹乱の種が必要となるが，粒状体の場合，本質的に不連続・不均質であるがゆえに，すべての粒子がこの撹乱の種の候補となってしまうからである．現象論的に言えば，大きな変形や破壊や流動といった共同的な運動が始まる前に，粒子スケールの小さな運動がじわじわ進行し，あるレベルで突然次の大きさの運動にスケールアップし，最後に境界にまで到達するようなモードが現れることである．このような現象の力学的記述には，その因果関係の発端である粒子スケールの運動を無視することはできない．

上記のような観点から考えると，土のように，構成粒子の材質，大きさ，形状が多様な粒状体は，最も取り扱いが困難な材料であることがわかる．特に，粒度分布は，昔から材料特性を占う指標として経験的に重視されているが，現象論的にも，また，解析上のスケール効果にも影響する非常に重要なパラメータであることも忘れてはならない．さらに，土は変形，破壊に伴って局部的に粒子破砕を伴うことも多いことが知られているが，この粒子破砕も粒度分布を変化させるため，見落としてはならない事実である．

数値粒状体の登場

さて，われわれは粒状体の中から一つの粒子を取り出した場合，粒子に力を加えたときの変形や運動を記述することはできる．では，二つの場合はどうだろう．粒子間の相互作用が求められれば，不連続・不均質性など気にせずに，つりあっている状態での変形量，もしくは，不つりあい力による運動は解析的に得ることができる．ところが三つ以上になると，何かの近似や仮定を導入しないと厳密な粒子間の相互作用は得られなくなる（物理学では，これを 3 体問題，または多体問題と呼ぶらしい）．ここで，適当な近似や仮定を与えることを許すとしよう．このようなアプローチから考えると，粒状体の力学的記述は単に複雑な条件下での境界値問題となり，幾何学的情報と力のつりあい（または運動方程式），それに力と変形に関する情報以外は何ら特別な力学を必要としないことになる．ところが，扱う粒子の数が 10 個，100個，1 000 個，…と増えてくると，理屈上可能な計算も，だんだん面倒になる．この考え方は，遅くとも 16 世紀には存在していたが，結局は実行不可能な机上の空論となりかけた．つまり，理屈は簡単なのに，計算量自体が非現実的過ぎた．

ところが，理屈の発展が滞っている間に，電子計算機が登場し瞬く間に進歩した．そして，1 秒間にギガ，テラのオーダーの演算回数をこなす計算機の登場によって，上記の方法で百万単位の粒子を扱うことが可能にな

った．このように計算機上で数値粒子を発生させ，個々の粒子の挙動を追跡する手法には，近似および仮定の導入法，解法，プログラミングのバリエーションがどんどん考え出され，数多くの異なる方法が提案されている．その結果，運動方程式を解く方法だけでなく，つりあいの条件を満足させる場所を解析的に探したり，幾何学的整合性だけに基づいたルールに従うだけでも，それなりに粒状体らしい動き方を呈するアニメーションや，内部を伝わる力の分布などが描けるようになった[4]．

このような展開が，昨今（1970 年代後半から最近まで）の多岐にわたる領域における粒状体研究ブームを再燃させたことは間違いない．3 次元のアニメーションは，実験ではなかなか見えにくかった内部の構造や運動パターンを見せてくれた．また，複雑な変形モードも再現でき，各粒子の逐次追跡によってその因果関係を考察するまでに至った．しかし，それだけでわれわれは粒状体の力学的記述ができるようになったのだろうか？　かくしてわれわれは，デモクリトスとレウキッポスの議論に終止符を打つことはできるのだろうか？

確かに，この数値粒子法は，これまでに観測が困難であった情報を可視化というオマケまで付けてわれわれに提供してくれた．しかし，数百万個の数値粒子の運動が記述できたとしても，それは計算機が計算できただけで，まだまだ粒状体の理解からは程遠い．つまり数値粒子はあくまで数値粒子であって，実際の砂には代わり得ない．「この方法で計算された数値粒子の挙動は，実験でも観測されました．」という報告の多くは，数値粒子を実在する粒状体に合わせたのではなく，実験を数値粒子に合わせた非常に特殊な条件下での観測によるものが多い．したがって，実際の砂の挙動を忠実に表した数値粒子の計算例は．まだ筆者の知るところ見たことがない．もちろん，計算されている本人もそんなことは重々承知であろう．粒子形状も粒度分布も全く架空の値に設定された数値粒子を使った計算結果を砂を使った実験結果と比較して，「これは，あくまでも単純化されたモデルであって，こんな簡単なモデルでも，定性的には良い一致が見られます」という考察を与えながらも，一方で，「計算と実験のギャップは，粒子形状や粒度分布によるものでしょう」と，きちんと付け加えてくれている．

砂の粒子一つ一つの 3 次元形状をすべて完璧にトレースして実験に用いた同じ数だけの数値粒子で計算することは，16 世紀の研究者が感じた馬鹿馬鹿しさに等しいものがある．理屈ではできそうだが，非現実的過ぎる．計算機のさらなる発展によって可能になる日が来るかもしれないが，同時にまた，計算機が計算するだけの結果になりそうでもある．それでは，計算と実験のギャップだけでなく，海の水の解析と砂の解析のギャップも永久に埋まりそうにもない．

数値粒状体から得られるもの

土の力学には，今のところ固体や流体で成功を収めている連続体力学の枠組みに当てはめることが王道となりつつある．したがって，砂のような粒状体にも，この枠組みの適用が求められている．しかし，前述のように，もともとバラバラの粒子から構成されているための幾何学的および力学的な不連続性・不均質性の理解および適切な導入という課題が解決されていない．

他方，数値粒子派も，粒子形状，粒度分布の問題を引きずったままである．また，もっと基礎的な知識として，多数の粒子が空間を充填するための幾何学的な知識も欠落している．つまり，数値粒子の初期充填方法が非常に曖昧なままである．粘土が正規圧密粘土と過圧密粘土によって分類されるのに，砂に対しては充填された状態がいかにして作られたかということは，あまり重視されていない．それは，「粒子形状には円盤あるいは球，粒度分布はほんの少しだけ与える．」という計算重視の手法内では，あまり差異が出ないし，充填密度というパラメータだけをコントロールすることは容易でないからである．しかし，ひとたび粒子形状と粒度分布のバリエーションを多くすれば，充填方法による粒子配列への影響は無視できないものとなる．この粒子配列こそが，不連続性・不均質性を決める鍵である．

最後に，この異なる 2 つの派閥（連続体派 vs 数値粒子派）がそれぞれ抱えている問題は，粒状体の力学的挙動のスケール効果という共通のテーマで繋がっていることを強調したい．今回の数値粒子ブームが単にブームで終わらないためにも，是非解決したい問題である．

参考文献

1－M. Born, Natural Philosophy of Cause and Change, Oxford at the Clarendon Press, 1951

2－M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London, Vol.52, p.229, 1831

3－G. Murchie, Music of the Spheres, Houghton Miffln Co., 1961

4－A. Murakami and H. Sakaguchi, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 2000 (in preparation)

社会システムのシミュレーション

上田孝行 Takayuki UEDA
正会員　工博
東京工業大学大学院助教授　理工学研究科国際開発工学専攻

経済学を中心として社会科学において発展してきた数理モデルは，力学モデルと多くの共通点を持っている．土木計画学の分野でも，社会科学の数理モデル用いた分析はすでに定着しており，経済学者等との交流を通じて一層の発展を見せている．本稿では，その共通性を簡単に述べた上で，最近特に注目を浴びている数理モデルを紹介したい．

力学モデルと社会科学モデルの共通性

数理モデルは社会科学の中で，特に経済学において最も多用され，同時に最も体系的に発展してきたと言える．最近では，ゲーム理論が経済学全体の基礎理論として大きな成果[1), 2)]を生み出しており，その影響は社会学や法律学など他の分野にも及んでいる．経済学における分析は，大きくは現象を記述する実証分析（positive analysis）と，あるべき政策を導出する規範的分析（normative analysis）に分類される．

実証分析で用いられるモデルは，

a）行動主体（個人またはグループ）の選択行動

b）行動主体間の相互作用（依存関係）を通して実現する状態

の 2 つを記述するステップからなる．選択行動モデルは，個々の主体が自分の効用（満足）や利益を最大にしたり，費用（犠牲）を最小にするように選択を行うという合理的行動仮説に基づいている．数学的には最適化問題の形式で表現され，そこでは力学でのポテンシャルと同じ概念が登場する．相互作用を通して実現する状態は，どの主体ももはや自らの選択を変更する誘因を持たない状態として定義され，均衡と呼ばれる．数学的には社会経済システムの構造を表す一連の方程式または不等式で記述される．この均衡自体も，ある条件が満たされる場合には経済社会システム全体の効用（利益）を最大化した最適状態と等価になり，そのため，最適化問題の形式で表されることも多い．例えば，ある都市圏の道路ネットワークを与えた下で，各道路区間の交通量を予測するといった問題は，ドライバーが旅行時間を最小化するように経路を選択して，社会全体としては混雑などが生じて，結果的にはどの経路も同じ旅行時間になったところで均衡するという構造になっている．これをある種の最適化問題として表現して解析することは交通分析[3)]でも定着している．

規範的分析でのモデルは，実証分析のモデルによって経済社会システムの構造を記述した上で，それを制約条件として，経済社会全体の効用を最大化するという最適化形式になる．制約条件が均衡を表しているという意味で，この構造を持った最適化問題を均衡制約付き最適化問題（MPEC: Mathematical Programs with Equilibrium Constraints）と呼び，近年ではその解法についても大きな発展[4)]が見られる．ある予算制約の下で，最も大きな経済的便益を上げるように公共投資の配分額を決定したり，種々の都市計画的な制限の下で最も円滑な交通を実現するように道路容量を割り当てるなどの問題は，このクラスの数学的問題として表現される．

以上のように，経済学での数理モデルは最大（最小）化問題の形式，または一連の方程式（不等式）で表現される．力学モデルが，エネルギー最小の原理の形式や一連の連成した方程式で表現できるという性質を思い起こせば，力学モデルと経済学の数理モデルに大きな共通点があることは明らかであろう．事実，Marshall や Samuelson などは，経済学の数理モデルを展開するにあたって物理学のモデルを参考にしており，その結果，加速度や弾力性といった概念は経済学においても主要な用語として定着している．

合理的行動仮説と均衡概念への批判

合理的行動仮説を用いること，そして，均衡概念によって社会経済状態をシミュレートすることには大きな批判が向けられている．力学モデルと同じような原理を採用して経済社会を捉えようとすること自体に拒絶感が表明される場面は多い．しかし，そのような批判の中にはモデルや理論への理解不足に根ざしていたり，単に合理的行動仮説や均衡概念を詳細化する程度で対応できるマ

イナーな問題をあげつらった無意味な場合も少なからず見られる．合理的行動仮説と均衡概念の採用は，問題を数学的に定式化して形式論理としての一貫性を保つためには不可避である．それを通して，われわれの知識が持つ限界を自ら認識することが可能になる．

一方，従来の狭い範囲の合理的行動仮説と均衡概念に対する建設的な批判が，社会科学の数理モデルを発展させてきたことも事実である．特に，近年のゲーム理論あるいは非線形動学（non-linear dynamics）を用いた諸理論は，合理的行動仮説と均衡概念を精緻化することによって，伝統的な経済モデルが取り扱えなかった問題までも射程に入れるようになってきた．個々人が合理的に行動したとしても，社会全体としては望ましくない状態に留まり続けてなかなか改革が進まない状況，ある政策を実行することがかえって望ましくない状態へと社会を誘導してしまう状況，などを的確に表現するモデルが多数展開されてきている．「現実は経済学では説明できない」，「経済学は役に立たない」「政策論に数学は要らない」などという情緒的な批判を口にする前に，まずは謙虚にそれらの発展について学ぶべきであろう．

最前線のモデルから

社会科学において近年著しい発展を見せているモデルを，ここですべて網羅的に紹介することはできない．筆者個人の興味に基づいたものであることを断った上で，いくつかを拾い上げて紹介したい．

第一は，進化論的ゲーム論[1),2)]である．進化論的ゲーム論は，行動主体が近視眼的であったり，十分な情報を持ち得ないといった限定された合理性の下で選択を行い，時間進行の中で淘汰を経て実現する均衡を表現する．それによって，例えば，VHS対βのような技術標準をめぐる競争，あるいはアメリカ的経営対日本的経営といった競争がどのような帰結をもたらすかという問題などを取り扱える．複数の安定均衡が存在し，そのため，歴史の初期における条件が最終的な帰結を支配するという歴史依存性などの興味深い性質が導かれている．従来は記述的にしか議論されなかった「寄らば大樹の陰」，「付和雷同」といった社会現象もこのようなモデルで説明される．土木計画においても住民参加が重視され，また，住民投票などの直接的な集団意思決定システムへの関心が高まっている．そこでは，進化論的ゲーム論のアプローチが一つの有効な切り口になり得よう．

第二は，確率論の応用である．確率論自体は社会科学においても定着しているが，その応用として近年特に著しいのは，金融工学[5)]においてである．株価等の資産価格の変動を確率過程としてモデル化し，さまざまな金融商品の価格付けが導出されている．特に，オプションの価格付けには確率微分方程式等の手法が応用され，その発展には数学者や工学者が大きな貢献を果たしている．最近では，防災投資の財源，あるいは復旧事業の財源を金融商品と連動して調達する手法が開発されており，土木事業の財源システムを設計するにあたっても金融工学の知識が必要になってきている．

第三は，非線形動学である．経済学における経済成長理論[1),2)]はこの20年の間に大きく変容を遂げ，特に，景気変動の周期性を解析したり，経済格差の拡大メカニズムを明らかにしている．貧しい国はなぜ貧しく，豊かな国はなぜ豊かなのか，そして，その中で社会基盤整備が果たす役割は何か，という問題が積極果敢に取り組まれている．ハミルトニアンを用いた制御理論が多用され，また，時にはカオスの発生メカニズムなども登場する分野である．現在の長い経済的停滞にあるわが国で公共投資の役割を考えるためには，この分野の知識が不可欠である．

第四は，計算経済学の展開[6)]である．経済学には計量経済学と呼ばれる確立された分野があるが，それに加えて，ファジー理論，ニューラルネットワーク，遺伝的アルゴリズムなどのソフトコンピューティングの手法，そして，不動点アルゴリズムや変分不等式解法などの新たな数値計算手法が展開されている．計量経済学が伝統的な統計的推定法を中心としたものであるのに対して，他の手法はその意味解釈がいまだ発展途上であることは否めない．しかし，経済学の多くの定性的理論がこれらの計算手法によって実際のデータを用いた解析の対象になり，理論を実際に応用するための大きな道が開かれている．これらの計算手法は応用力学でも多数の蓄積が見られるので，是非ともそれを社会システムのシミュレーションに活かしていくべきであろう．

今後の交流に向けて

近年，経済学が本家であると思われている数理経済学が，実は19世紀フランスにおける土木工学の中から誕生したとするいくつかの見解[7)]が出てきている．土木工学の社会的使命から考えれば，土木工学の専門家集団が力学モデルと同様に，経済社会モデルに対しても積極的に学び，そして，その発展に貢献すべきであることに疑義を唱える者は少なかろう．土木工学の専門家が形成している学会こそが力学モデルと経済社会モデルの相互の

発展を生み出すまさに最良の場の一つではなかろうか．すでに応用力学委員会・逆問題小委員会では，部門横断的な交流が試みられており，経済社会モデルを力学モデルと同様に逆問題のアプローチから捉え直すという研究成果[8)] が実現している．このような試みが増えていくことを心から願いたい．

参考文献

1－山口利夫：経済学の新動向，三菱経済研究所，1997
2－岩井克人，伊藤元重編：現代の経済理論，東京大学出版会，1994
3－土木計画学研究委員会「交通ネットワーク」出版小委員会：交通ネットワークの均衡分析，土木学会，1998
4－Luo, Z. et al：Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Cambridge University Press，1996
5－ダフィー，D.：資産価格の理論，創文社，1998
6－Judd, K.：Numerical Methods in Economics, MIT Press，1998
7－Ekelund，R.B. and Hebert，R.F.：Secret Origin of Modern Microeconomics, Chicago University Press，1999
8－応用力学委員会逆問題小委員会編：土木工学における逆問題入門，土木学会．2000

ファイナンス数学点描

長井英生 Hideo NAGAI
理博
大阪大学大学院教授　基礎工学研究科情報数理系専攻数科学分野

数理ファイナンスの分野は，実務界からの強い要請に呼応して，最近急速に発展している．その全貌を小論にまとめるのはすでに不可能となっていると思われるし，筆者の力の及ぶところでもない．ここでは，そこでどのような数学が応用されているか，またどのような数学的問題を生み出しているか，その一端をかいま見てみよう．

ブラック・ショールズモデルのその後

すでに古典とさえ言えるブラック・ショールズモデルについて述べることは，避けて通れないであろう．まず，2 種類の原証券があるとする．一つは，安全資産（riskless asset）と呼ばれるもので，例えば国債がこれに相当する．もう一つは，危険資産（risky asset）と呼ばれ，これは例えば株式が相当する．安全資産には一定の利息がつくので，その価格 $S^0(t)$ は常微分方程式 $dS^0(t)=rS^0(t)dt$ に従うものと定式化し，一方，危険資産の価格 $S^1(t)$ は，確率微分方程式 $dS^1(t)=S^1(t)(\mu dt+\sigma dW(t))$ に従うものとする．ここに現れたパラメータ r は利率であり，μ は危険資産の期待収益率，σはその変動の度合いを表すもので，ボラティリティと呼ばれる．$W(t)$ はある確率空間（Ω, F, P）上で定義されたブラウン運動である．この確率微分方程式の解である，危険資産の価格 $S^1(t)$ は $S^1(t)=S^1(0)e^{\sigma W(t)+(u-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$ と表せることから，幾何ブラウン運動であるという．

さて，問題はこの二つの原証券から，オプションと呼ばれる派生証券（デリバティブ）を作ったとき，その合理的な価格をいかに決めるかということである．このオプションとは次のようなものである．ある株を（今の場合 S^1_τ を），あらかじめ決めた数量だけ，決めた価格（権利行使価格）で，決まった時点（満期日）に購入または売却する権利で，その権利を行使する，しないの選択をその時点で選ぶことができる．当然のことながら，満期日にその株価が権利行使価格より，安ければ，購入する側はその権利は行使しないし，高ければ行使するであろう．したがって，その権利が無料であることはあり得ない．そのため，その権利に価格をつけるわけであるが，その価格は，売り手にとっても，買い手にとっても，どちらかが一方的に有利ということがないようなものでなければ，商品として成立しない．その合理的な価格を決めたのが，ブラック・ショールズの公式と呼ばれるものである．この公式を現代的なやり方で説明するには，リスク中立確率と呼ばれる，もとの確率測度と同値な確率測度を，ギルサーノフの定理を用いて導入する．そのような確率が存在することが，“ 裁定機会 ” がないこと，すなわち，一方的に有利になる投資戦略が市場に存在し得ないことを保証するものである．今の場合 $e^{-\frac{1}{\sigma}(u-r)W_t-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu-r)^2t}$ を密度にもつ新たな確率 Q をとるとき，これが，リスク中立確率で，Q の下では $\overline{W}_t=W_t+\frac{1}{\sigma}(\mu-r)t$ がブラウン運動となり，したがって $\overline{S}_t\equiv e^{-rt}S^1_t$ は $d\overline{S}_t=\sigma\overline{S}_t d\overline{W}_t$ を満たす，すなわち，マルチンゲールとなる．さて，投資家の持つ資産を $V_t(h)=h^0(t)S^0_t+h^1(t)S^1_t$ としよう．ここで，$h^0(t)S^0_t$，$h^1(t)S^1_t$ はそれぞれ，安全資産，危険資産への投資額であ

る．資産への投資資金を外部から調達しないし，外部にも使用しない，この二つの原証券への投資の組み合わせだけを変える（ポートフォリオを組む），すなわち $dV_t(h)=h^0(t)dS_t^0+h^1(t)dS_t^1$ という関係が成立するような戦略をとることにする．このとき，$\overline{V}_t(h)\equiv e^{-rt}V_t(h)$ とすると，$d\overline{V}_t(h)=h^1(t)d\overline{S}_t^1$，すなわち $\overline{V}_t$ も Q の下でマルチンゲールとなる．上に述べたオプションは満期日を T，行使価格を K とすると，買い手が条件付請求権 $\left(S_T^1-K\right)_+$ を保有することと言っても良い．すなわち，時刻 T において危険資産の価格 S_T^1 が行使価格 K を超えているときに限り，その差額を請求することのできる権利と言える．このとき，その条件付請求権の理論価格は，マルチンゲール性（文献 2）参照）を用いて，リスク中立確率 Q により

$$E^Q\left[e^{-rT}\left(S_T^1-K\right)_+\right] \tag{1}$$

と表されることがわかる．また，$U_t\equiv E^Q[e^{-rT}(S_T^1-K)+|F_t]$ がマルチンゲールであるので，マルチンゲール表現定理により，ある可予測確率過程 $\phi(t)$ があって，$U_t=U_0+\int_0^2\phi(s)d\overline{W}_S$ と表される．この $\phi(t)$ を用いて $\hat{h}^1(t)=\sigma^{-1}\left(S_t^1\right)^{-1}e^{rt}\phi(t)$，$\hat{h}^0(t)=U_t-\sigma^{-1}\phi(t)$ と定義するならば，$\hat{h}(t)=\left(\hat{h}^0(t),\hat{h}^1(t)\right)$ が上の条件付請求権 $\left(S_T^1-K\right)_+$ を複製する戦略である．オプションを売る側は，売ると同時にこの複製戦略をとることにより，リスクをヘッジできるというわけである．式（1）は明示的に

$$S_0^1\Phi\left(y_1\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(y_2\right) \tag{2}$$

ここで，$\Phi(y)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$，$y_1=\frac{\log(S_\sigma^1/K)+T(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}$，$y_2=y_1-\sigma\sqrt{T}$ と表される．これが，ブラック・ショールズの公式と呼ばれるものである．

ここで用いられている数学は，1960 年代に確率論・確率解析の分野で盛んに研究されたマルチンゲール理論に基づく確率微分方程式の理論であり，国田・渡辺の二乗可積分マルチンゲールの理論が特に重要な役割を果たしている．数学的な立場から見るとき，上の枠組みは，危険証券が多数あり，その価格が上のような確率微分方程式の解として表され，上のボラティリティ σ 期待収益率 μ が定数でなくランダムな場合でも，確率微分方程式を定義するブラウン運動の次元と危険証券の数が同じであるならば（このとき，市場は完備である），一定の条件の下で一般化され，オプションの理論価格は式（1）のような形で求められる．問題はその価格が式（2）のような明示的な形で示されるかどうかである．実務的には，具体的な計算に乗るような明示的な公式が要求されるからである．また，上で一定の条件の下でと述べたその条件を追求するとき，新たな数学的問題が生み出され，一つの研究対象となっている．市場が完備でない場合には種々の問題があり，さまざまな立場で研究されている．さらに，ここではヨーロッパ型オプションについてだけ述べたが，アメリカンオプション，アジア型オプション，バリアーオプション，パスポートオプション等々さまざまなものが考えられ，その価格付けが問題とされている．

リスク鋭感的ポートフォリオ最適化

さて，次に，マーコビッツによって始められた，平均・分散アプローチの数学的な発展とも言える，リスク鋭感的ポートフォリオ最適化の問題について述べておこう．リスク鋭感的確率制御問題が，'90 年代初頭の Whittle の仕事を契機として，H 無限大制御との関連から盛んに研究されるようになったが，最近その影響が数理ファイナンスの分野にも及んで，リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題として研究されてきている．ここでは，Bieleckl-Pliska の仕事を基にして述べよう．次のようなファクターモデルを考える．m+1 個の有価証券（securities）があるとする．これは，国債，各種債券，株等の原証券だけでなく派生証券も含むとする．そのうちの一つは国債であり，その価格 $S^0(t)$ は，$dS^0(t)=r(t)S^0(t)dt$，$S^0(0)=s^0$ なる方程式に従っているものとする．ここで $r(t)$ はランダムでないものとする．他の有価証券はその価格 $S^i(t)$ が次の確率微分方程式 $dS^i(t)=S^i(t)\left\{\left(a+AX_t\right)^i dt+\sum_{K=1}^{n+m}\sigma_k^i dW_t^k\right\}$，$S^i(0)=s^i$，$i=1$，$\ldots$，$m$ に従っているものとする．ここで，$W(t)=\left(W^k(t)\right)_{k=1,2,\ldots,m+n}$ は $m+n$ 次元標準ブラウン運動であり，a，A は定数ベクトル，σ_k^i は $m\times(m+n)$ 定数行列であるとする．$A=0$ のときは，上で触れた Black-Scholes モデルのいわゆる幾何ブラウン運動と呼ばれるものである．ここに現れた X_t はファクターと呼ばれるもので，株の配当であったり，短（長）期金利であったり，インフレーション率といった経済的な要因であり，次の確率微分方程式に従う確率過程であるとする．

$dX_t=\left(b+BX_t\right)dt+\Lambda d W_t$，$X(0)=x\in R^n$，

ここでも，b，B は定数ベクトル，Λ は $n\times(m+n)$ 定数行列とする．実務家が有価証券の収益を予想するにあたってしばしば経済的な要因を利用するとされ，それを数学的にモデル化したものである．すなわち，瞬間的な期待収益率を意味する係数の部分が，経済的な要因 X_t の一次関数で決まるようなモデルに修正されたものである．

このとき，投資家が時刻 t において m+1 個の有価証券 $S^0(t)$，…，$S^m(t)$ をそれぞれ $h^0(t)$，…，$h^m(t)$ だけ（比率として，したがって $\sum_{i=0}^{m} h^i = 1$）保有することにより（ポートフォリオを組むことにより），保持することになる資産の額のダイナミックスは，$\sum_{i=0}^{m} h^i = 1$ を考慮に入れると，

$$\frac{dV_t}{V_t} = r(t)dt + h(t)^*\left(a + AX_t - r(t)\mathbf{1}\right)dt + h(t)^*\Sigma dW_t$$

と書ける．ここで $\Sigma = \left(\sigma_j^i\right)$，$\mathbf{1} = (1,\ \ldots,\ 1)^*$ であり，$h(t) = (h^1(t), \ldots, h^m(t))^*$ とする．問題はこの投資家の保有する資産の成長率 $\log V_T(h)$ を最大化することであるが，その問題にロバスト性を考慮に入れた，リスク鋭感化問題（risk-sensitized problem），すなわち，

$$J(v, x; h; T) = -\frac{2}{\theta}\log E\left[e^{-\frac{\theta}{2}\log V_T(h)}\right] \qquad (3)$$

を最大にするポートフォリオを求める問題を考察する．ここで，θ はリスク鋭感的パラメータと呼ばれるが，その意味は $\theta \to 0$ としたときの漸近挙動

$$J(v, x; h; T) \sim E_x\left[\log V_T(h)\right] - \frac{\theta}{4}\mathrm{Var}\left[\log V_T(h)\right] + O\left(\theta^2\right)$$

を考えればわかる．すなわち，$\theta > 0$ で 0 に近いとき，式（3）を最大化する問題は近似的に，資産の成長率 $\log V_T(h)$ の期待値を最大化するとともに，その分散を最小化する問題となる．リスク鋭感的最適化では，この $O(\theta^2)$ の部分まで考慮に入れて問題を考察するわけであり，その部分を切り捨てれば，平均・分散アプローチとなるわけである．この問題の最適ポートフォリオ $\hat{h}_t$ は

$$\hat{h}_t = \frac{2\left(\Sigma\Sigma^*\right)^{-1}}{\theta + 2}\left\{a + AX_t - r(t)1 - \frac{\theta}{2}\Sigma\Lambda^*\left(P(t)X_t + g(t)\right)\right\}$$

であり，そのときの値関数（リスク鋭感化期待最適成長率）は

$$J\left(v, x; \hat{h}; T\right) = \frac{1}{2}x^*P(0)x + g(0)^*x + k(0)$$

と計算される．ここで，$P(t)$ はある行列リッカチ方程式の解であり，$g(t)$ はその解から決まる常微分方程式の解，さらに，$k(t)$ はそれらから決まる常微分方程式の解である．さて，ポートフォリオを選択する範囲を決めるにあたって，ここでは，有価証券ばかりか，ファクターの過去のすべての情報を用いたものとしたが，ファクターの過去の情報すべてを用いるのは現実的でないという議論があり，それを用いないでポートフォリオを選択する問題を考察するとき，フィルタリングの議論が介在することになる．ここでは，ベルマンの考えに基づいて，カルマンの時代の制御理論を発展させた議論が活躍する．

以上，断片的であるが，ファイナンス数学の一端を紹介した．

参考文献

1－R. J. Elliot and P. E. Kopp：Mathematics of Financial Markets, Springer, 1999

2－長井英生：確率微分方程式，共立出版，1999

3－長井英生：リスク鋭感的確率最適制御と数理ファイナンス，システム／制御／情報，第44巻8号，2000

維持管理を力学する

小林潔司 Kiyoshi KOBAYASHI

正会員　工博

京都大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻

維持管理とファイナンス

コーポレート・ファイナンス（企業財務）では，個々のプロジェクトのポートフォリオ注1) を考え，それぞれのプロジェクトより発生するキャッシュフローの現在価値をベースに個々の投資計画や企業戦略を決定する．そこでは，刻々と変化する個々のプロジェクトのキャッシュフローを観察しながら，「どのようなプロジェクト」を「どのようなタイミング」で実施するかを決定することが問題となる．社会資本の維持管理においては，土木構造物の性能水準や機能水準の劣化状況をモニターしながら，適切なタイミングで補修・更新を行うことが問題となる．プロジェクトのキャッシュフローの将来予測にはリスクが介在するが，土木構造物の劣化プロセスの予測

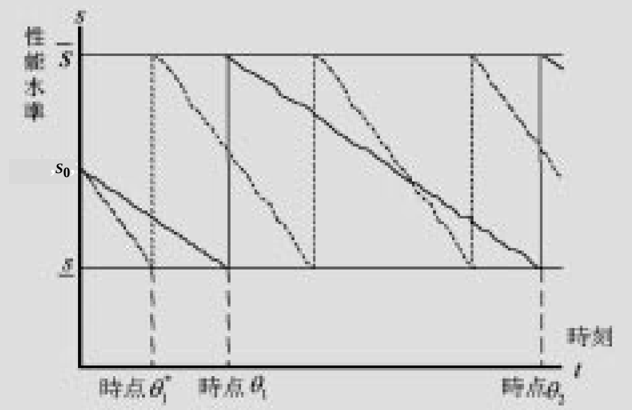
にも不確実性が存在する．いずれの問題も，不確実な環境の下で，投資のタイミングと規模を決定するという共通点がある．このように両者の間には共通点も多く，ファイナンス工学は土木構造物の維持管理を支える技術として発展することが期待できる．本稿では，ファイナンス工学を用いた土木構造物の維持・管理の考え方と，今後の研究の発展方向について説明する．

補修問題へのファイナンス工学の適用

図-1 に示すような土木構造物の劣化過程を考えよう．簡単のために，構造物の利用者数が一定であり，劣化過程のみが不確実であるとする．土木構造物の劣化に伴い，性能水準 s が低下すると考える．土木構造物の性能水準が初期水準 s_0 から実線で示すように推移し，時点 θ_1 において水準 $\underline{s}$ になったとしよう．この時点で補修を行えば，性能水準は $\overline{S}$ まで回復する．その時点から再び劣化が始まり，時点 θ_2 で再び補修が行われる．土木構造物が永久に供用される場合，このような劣化と補修の過程が無限に繰り返される．性能水準の劣化過程に不確実性が存在するとしよう．図-1 の実線で示した劣化過程以外にも無数に多くの経路が考えられる．その一つとして図-1 の破線の経路を考えよう．この場合，土木構造物の性能水準は実線の場合よりも早く劣化し，時点 θ_1 よりも早い時点 θ_1^* で補修が行われる．

土木構造物のライフサイクルコスト（LCC）を，1）土木構造物を利用することにより生じる利用者費用と，2）土木構造物の建設費用，補修費用の現在価値の総和により定義しよう．利用者費用にはユーザが直接負担する費用だけでなく環境費用等の費用も含まれる．土木構造物の劣化過程が異なれば LCC も異なる．そこで，期待 LCC を，実現可能な劣化過程のすべてに対する LCC の期待値として定義しよう．図-1 に示した土木構造物の最適補修モデルは，期待 LCC を最小にするような補修戦略を求める問題として定式化できる．劣化過程に不確実性があるため，確定的な補修計画を立案することは合理的ではない．筆者らは，最適補修戦略が補修を実施すべき水準 $\underline{s}$ と補修後の水準 $\overline{S}$ のペア($\underline{s}$， $\overline{S}$)として導出できることを示している[1]．

ファイナンス工学では，株式の価格の変動を確率微分方程式（伊藤方程式）を用いて表現する[2), 3)]．確率微分方程式を利用することにより，問題の直観的把握が容易になる．構造物の維持・管理問題では，株式の価格変動の代わりに，図-1 に示すような土木構造物の性能水準の劣化過程を確率微分方程式で表現することになる．企業財務や企業戦略の問題は，確率ダイナミックプログラミングの手法や最適制御理論を用いて確率微分方程式で表されるキャッシュフローをいかに制御するかという問題として定式化できる．



実線・破線で示す経路は土木構造物の性能水準の2つの異なる劣化過程を示している．最適補修問題は，期待LCCを最小にするような $\underline{s}$，$\overline{S}$ を求める問題として定式化される．

図-1　土木構造物の補修問題

維持管理問題においても，確率微分方程式で表される劣化過程を補修・更新投資を通じて制御する問題として定式化できる．このような最適制御問題の最適化条件は，偏微分方程式により記述できる．問題に応じた初期条件，境界条件が与えられれば，偏微分方程式を解くことにより，最適戦略を求めることができる．例えば，ファイナンスの基本であるオプション注2) の価格は土質工学の圧密方程式と同様に熱伝導型の方程式を解くことにより求まる．最適化条件が非線形の偏微分方程式に帰着される場合が多く，差分法やモンテカルロシミュレーションにより，偏微分方程式をいかに効率的に解くかが鍵となる．応用力学で発達した解法を用いることが有効な場合も少なくない．図-1 で示した補修問題も，劣化メカニズムに対する最適制御問題として定式化され，最適補修戦略は偏微分方程式を数値的に解くことにより求めることができる．

リスクマネージメントとしての維持管理

ファイナンス工学が適用可能な問題は，土木構造物の補修問題にとどまらない．例えば，性能設計の問題をとりあげてみよう．図-1 に再び戻り，構造物の供給開始時点を初期時点と考える．土木構造物の力学的性能が時間とともに劣化していくと考えよう．このとき，将来の維持補修の可能性も考慮に入れたような性能設計の問題は，期待 LCC を最小にするような初期性能水準 s_0 を求める問題として表すことができる．将来時点における土

木構造物の運用計画に応じて，多様な性能設計モデルを定式化することができる．例えば，将来時点において構造物の転用や容量増強を目的とした追加投資の可能性がある場合，構造物の供用年数の不確実性を考慮に入れた性能設計モデルが必要となるだろう．このように，構造物の特性や管理・運営方法の目的に応じて多様な性能設計モデルを提案することが可能となる．

ファイナンス工学を適用することの利点は，将来起こるであろう劣化過程，施設需要，災害といった多様なリスクを総合的に考慮しながら，維持・管理戦略を期待 LCC（あるいは期待純便益）という統一的な視点から経済評価できることである．さらに，各時点で生じるキャッシュフローの不確実性を明示的に考慮することが可能であるため，維持管理を含めたプロジェクトファイナンスが可能となる．期待 LCC の計測結果を，対象とする土木構造物の費用対効果分析にも用いることができる．さらには，期待 LCC に基づいて構造物に対する災害保険料率も算定することができる．これまでは，構造物の性能設計，維持補修，プロジェクトファイナンス，費用対効果分析，災害保険等の問題が，それぞれ単独の問題として別々に処理されてきた．しかし，図-2 に示すように，これらの問題に個別にアプローチするのではなく，土木構造物の劣化過程を中心とするような総合的なリスクマネージメント技術として体系化していく必要がある．そのためのリスクマネージメントの技術が，ファイナンス工学である．

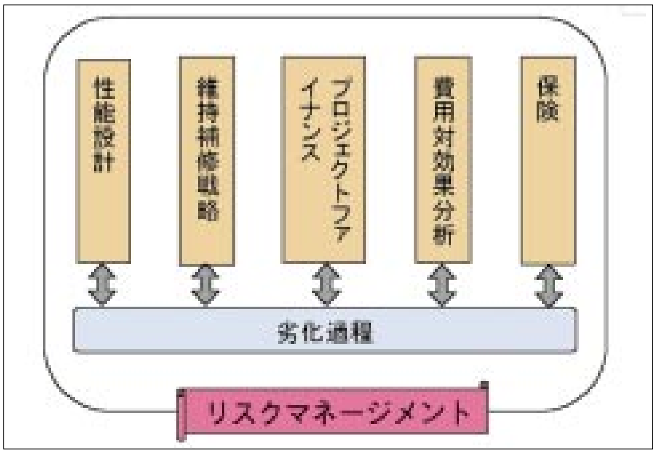


図-2　維持・管理のリスクマネージメント

維持・管理技術の高度化をめざして

土木構造物の維持・管理問題へのファイナンス工学手法の適用に関しては，スタートラインに立ったばかりである．ファイナンス工学の導入により，土木構造物の維持・管理の問題に対してリスクマネージメントという統一的な視点からアプローチすることが可能となる．そのためには，土木工学，ファイナンス工学，経済学という学際的な研究領域を開拓していく必要があろう．ファイナンス工学を維持・管理問題に適用する場合，構造物の劣化過程を確率微分方程式としてどのように表現するかが重要な課題となる．一度劣化過程をモデル化できれば，その確率微分方程式を用いて多様な性能設計モデル，維持管理モデル，ファイナンスモデルを定式化することができる．現在のところ，土木構造物の劣化過程（確率微分方程式のパラメータ値）に関するデータは，ほとんど蓄積されていないのが実状である．当面の間，暫定的な値を採用せざるを得ず，分析結果の信頼性には問題が残ろう．しかし，思考実験を繰り返すことにより，少なくとも，今後「どのようなデータを蓄積していくべきか」は明らかになるだろう．社会資本の維持管理の合理化にとって，思考実験の効用は決して少なくないと思える．

注1）貨幣，株式，債権などの金融資産，不動産などの実物資産を組み合わせた資産の保有形態をポートフォリオと呼ぶ．

注2）オプションとは，特定の商品や有価証券などの資産を，あらかじめ定められた期日ないし期間内に，定められた価格で購入あるいは売却する権利を意味する．

参考文献

1－栗野盛光，渡辺晴彦，小林潔司：不確実性下における最適更新ルール，土木計画学研究・講演集, Vol. 22(2), pp.379-382，1999

2－トーマス・ミコシュ，遠藤　靖訳：ファイナンスのための確率微分方程式，東京電機大学出版会，2000

3－養谷千凰彦：よくわかるブラック・ショールズモデル，東洋経済新報社，2000