

重力式海洋構造物まわりの地震時動水圧の解析法

ESTIMATION METHOD FOR HYDRODYNAMIC PRESSURES ON OFFSHORE STRUCTURES DURING EARTHQUAKES

森田知志¹・中村孝幸²

Satoshi MORITA and Takayuki NAKAMURA

¹正会員 博士(工) (株)熊谷組 土木技術部 (〒162-8557 東京都新宿区津久戸町2-1)

²正会員 工博 愛媛大学工学部 (〒790-8577 愛媛県松山市文京町3)

The three dimensional source distribution method is a popular technic to estimate hydrodynamic pressures on offshore structures during earthquakes. However, because only series-form expression of proper Green function was available, it takes long CPU time for accurate calculation. In this paper, an alternative integral-form expression of Green function is derived and its efficient way to calculation is presented. Resultant acting forces on circular and submerged rectangular cylinders vibrating horizontally under the effective dimensions of cylinders are also presented.

Key Words : Source distribution method, Green function, hydrodynamic pressure, earthquakes, offshore structure

1. はじめに

地震時における海洋構造物の滑動や転倒に対する安定性を判断する際には、外力として構造物自身の慣性力に加えて周囲の海水による動水圧の影響を考慮する必要がある。構造物に作用する動水圧の合力の強度は構造物の排水量に匹敵する主要外力と見なされることから、構造物の形状の影響を正確に考慮できる各種の動水圧解析法が数多く研究されてきている。このような解析法の中で、3次元Green関数を用いたわきだし分布法は構造物の形状を任意に取り扱える点において汎用性の高い手法ではあるが、数値計算に要する時間が多大となりがちなことに加えて、著者らの経験によると、解析解に比べると計算精度がいまひとつ不十分であることなどの課題が見受けられる。

わきだし分布法は、浮体の動揺や構造物まわりの波力・波変形など、波浪と構造物の相互干渉問題に対しても多用されてきているが、その際に用いられるGreen関数の計算手法をみると、Green関数を収束

性の異なる級数型および積分型の両者で別々に表現し、条件に応じてこれらを使い分けることで計算速度と精度の両立を図っていることがわかる。一方、これまで提案されてきた動水圧解析に関するわきだし分布法¹⁾³⁾では、Green関数の積分型表示式は明らかにされておらず、計算は級数型のみに基づいて行われてきている。動水圧解析においても波浪解析と同様に積分型のGreen関数を併用することにより、上記した課題の解決がはかられるものと期待される。

本研究では、わきだし分布法による動水圧解析の計算時間短縮と精度向上を図るために、3次元Green関数の誘導過程の見直しを行って、級数型および積分型の表現式の各々を明らかにすると共に、新たに誘導した積分型表示式の具体的な計算方法について示すものである。さらに、構造物の基本となる形状であるにも拘わらず従来においてあまり研究対象とされてこなかった没水型の矩形柱体を対象とした一連の計算を行い、動水圧の合力の強度と、それに及ぼす構造物各部の寸法の影響について明らかにするものである。

2. わきだし分布法による動水圧計算の概要

(1) 基礎方程式および境界条件

図-1に示すように、一様水深 h の海域に設置された任意形状の剛な構造物が x 軸と角度 θ をなす水平方向に調和振動している状況を考える。ここでは、水深は比較的小さいものと仮定して、周囲の海水の圧縮性を無視して取り扱う。また海水の運動は式(1)に示す速度ポテンシャル ϕ により表されるものとする。

$$\Phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

ここに、 ϕ ：速度ポテンシャルの空間変動項、 $\omega=2\pi f$ ：角振動数 (f 周波数)、 i ：虚数単位、 t ：時間である。 ϕ の満たすべき基礎方程式と境界条件は式(2)~(5)のとおりである。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

$$\phi = 0 \quad (z=0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -i\alpha g \omega (n_x \cos \theta + n_y \sin \theta) \quad (\text{on } A) \quad (5)$$

ここに、 $n=(n_x, n_y, n_z)$ ：構造物表面 (x, y, z) に立てた外向き単位法線ベクトル、 αg ：水平振動の加速度振幅 (g ：重力加速度)である。式(3)は動水圧が水表面において大気圧に接続する条件、式(4)は水底の不透過条件、式(5)は構造物表面において水粒子の運動速度が構造物のそれに等しいという境界条件である。

海中に現れる動水圧の複素振幅 p は、以上の境界値問題を解いて得られた ϕ により、線型化された圧力方程式を介して式(6)で求められる。

$$p(x, y, z) = i\rho\omega\phi \quad (6)$$

ここに、 ρ ：海水の密度である。

さらに、構造物の没水表面上の p の分布を求め、これを力の方向を考慮しながら積分することにより、合力の複素振幅 F が求められる。

(2) 速度ポテンシャルの表示

式(2)~(5)を満足する ϕ は、わきだし分布法により、式(7)のように表示できる。

$$\phi(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \sigma(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) P_j(x, y, z) \quad (7)$$

ここに、 σ は式(5)を満足させるために構造物表面に配置したわきだしの強度関数である。なお構造物の没水表面は、数値計算が容易となるように、 N 個の

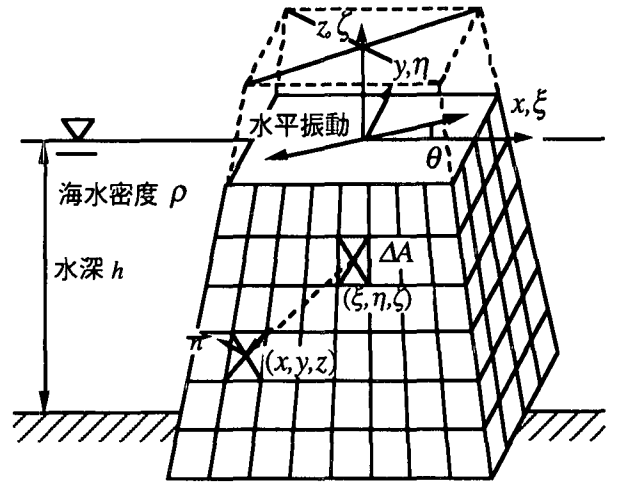


図-1 わきだし分布法におけるモデル設定

微小パネルで近似されたものとしており、式中の和記号 Σ は構造物表面にわたる面積分をあらわす。 σ の決定方程式は式(8)のようである。

$$\sum_{j=1}^N \sigma(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) Q_{ij} \quad (i=1 \dots N) \quad (8)$$

$$= -i\alpha g \omega (n_x^{(i)} \cos \theta + n_y^{(i)} \sin \theta)$$

そして式(7),(8)中の P_j 、 Q_{ij} は後述するGreen関数 G による以下のような積分関数を表す。

$$P_j(x, y, z) = \int_{\Delta A_j} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dA \quad (j=1 \dots N) \quad (9)$$

$$Q_{ij} = \int_{\Delta A_j} \frac{\partial G(x_i, y_i, z_i; \xi, \eta, \zeta)}{\partial n_i} dA \quad (i, j=1 \dots N) \quad (10)$$

ここに、 ΔA_j は j 番目のパネル面である。

3. Green関数の誘導

(1) 支配方程式およびその解法

ここでのGreen関数 G は、構造物を除いた一定水深の流体場中において、点 (ξ, η, ζ) に置いた単位強さの3次元わきだしにより流体中の任意点 (x, y, z) に生じる速度ポテンシャルを表す。 G の満足すべき基礎方程式と境界条件は、式(2)~(4)を円筒座標系 (r, z) で表示した式と類似しており、次のように表される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(r, z; \zeta) = \delta(z - \zeta) \quad (11)$$

$$G = 0 \quad (z=0) \quad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (13)$$

ここに、 δ ：Diracのデルタ関数である。

式(11)~(12)を満足する $G(r, z; \zeta)$ は、各々の式をHankel変換して常微分方程式に導くことによって次式のように求められる。

$$G = \int_0^\infty \frac{\cosh v(z_c + h)}{\cosh vh} \sinh v z_s J_0(vr) dv \quad (14)$$

ここに、 $z_s = \max(z, \zeta)$, $z_c = \min(z, \zeta)$, J_0 : 0 次の第 1 種 Bessel 関数である。

(2) Green 関数の級数型表示式³⁾

式(14)中の被積分関数の複素平面上における特異点は次のとおりである。

$$v = i k_m = i \frac{(2m-1)\pi}{2h} \quad (m=1,2,\dots) \quad (15)$$

特異点を考慮しながら、式(14)中の被積分関数に部分分数展開を適用し、さらに Bessel 関数の積分公式を利用して若干の演算を行うと G の級数型表示式が次式のように誘導される。

$$G = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \cos k_m(z + \zeta) - \cos k_m(z - \zeta) \right\} K_0(k_m r) \quad (16)$$

ここに、 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, K_0 : 0 次の第 2 種変形 Bessel 関数である。

式(16)には、 $(x, y, z) = (\xi, \eta, \zeta)$ で発散する逆数型の特異関数が含まれており、これは次の関係式を適用して分離表示できる。

$$\begin{aligned} \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} K_0(k_m r) \cos k_m Z &= \frac{1}{R} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\ell}{\sqrt{r^2 + (Z-2\ell h)^2}} + \frac{(-1)^\ell}{\sqrt{r^2 + (Z+2\ell h)^2}} \right\} \end{aligned} \quad (r > 0) \quad (17)$$

ここに、 $R = \sqrt{r^2 + Z^2}$ である。式(17)の右辺に含まれる無限級数項は $(R \rightarrow 0)$ の条件下では、左辺のそれに比べて収束しやすい。したがって、級数型表示式のみに基づく G の計算では R の値によって式(16)を直接用いるか式(17)右辺を用いるかの使い分けが行われてきた。しかしながら、式(17)は $(r > 0)$ の条件下で成立する関係式であり、左辺には $(r \rightarrow 0)$ で発散する第 2 種変形 Bessel 関数 K_0 が含まれているのに対し、右辺にはそのような関数はみられない。したがって、 $(r=0)$ となるような場合には、 K_0 をパネル上で面積分するなどの工夫をした上で式(16)を用いざるを得ない。このことが、前述したように、 G の計算に時間がかかり精度もあまりよくないことの原因であると思われる。

(3) Green 関数の積分型表示式

次の関係式を利用して、式(14)に含まれる逆数型の特異関数を抽出する。

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-vZ} J_0(vr) dv \quad (r, Z \geq 0) \quad (18)$$

式(14)に代入して整理すると、 G の積分型表示式が次式のように誘導される。

$$G = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-vh} \left\{ \frac{\cosh v(z-\zeta)}{\cosh vh} - \frac{\cosh v(z+\zeta)}{\cosh vh} \right\} J_0(vr) dv \quad (19)$$

ここに、 $R_0 = \sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}$, $R_1 = \sqrt{r^2 + (z+\zeta)^2}$ である。

式(19)右辺中の無限積分の実際的な計算式は、表面重力波に対する Green 関数の効率的な算定方法を示した Seto⁴⁾ と同様に、次の公式 (Hobson⁵⁾) を利用して誘導することができる。

$$\cosh vZ J_0(vr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(vR)^{2n}}{(2n)!} P_{2n}(Z/R) \quad (20)$$

ここに、 P_n : Legendre 多項式である。

式(20)といくつかの積分公式を利用して演算を行うと、無限積分の計算式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-vh} \cosh vZ}{\cosh vh} J_0(vr) dv \\ = \frac{1}{h} \left\{ \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot (R/h)^{2n} \cdot P_{2n}(Z/R) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、

$$C_n = 2^{(-2n)} (1 - 2^{(-2n)}) \cdot \zeta(2n+1) \quad (n=1,2,\dots) \quad (22)$$

$\zeta(n)$: Riemann Zeta 関数である。

式(21)を利用すると、式(19)は級数により表されるため、数値計算として取扱いやすい。また、同式右辺中の無限級数は $(R/h) < 1.0$ のときには急速に収束する。この特性は、級数型表示式(16)と相互に補完する関係にあり、これらを条件に応じて使い分けることで、Green 関数の効率的な計算が可能となる。

(4) 級数型および積分型 Green 関数の計算時間

式(16)および式(19)をパーソナルコンピュータで計算し、各々の表示式による計算所要時間 (CPU time) について調べた結果を図-2 (a),(b) に示す。この計算にあたっては、水深 h , わきだしの座標 (ξ, η, ζ) および着目点の鉛直座標 z を固定し、 r のみを変化させた場合について、各算定式による結果が同等の精度となるまで式(16)あるいは式(21)右辺の級数項の計算を続けて行った。計算所要時間は電算機の種類やソフトウェアに依存するため、図中では充分大きな r に対する式(16)の計算所要時間を用いて無次元化して表示してある。

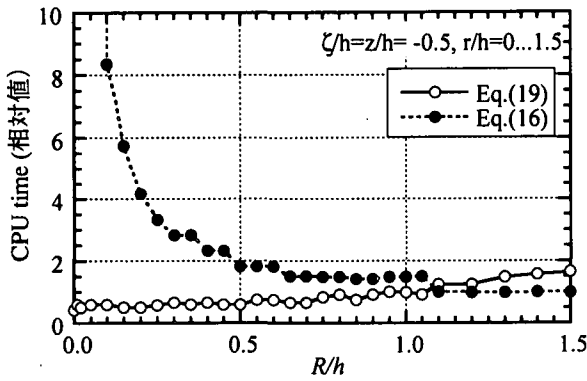


図-2 (a) Green関数の所要計算時間の比較(1)

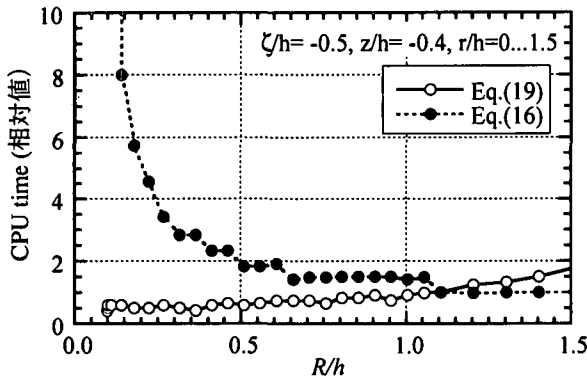


図-2 (b) Green関数の所要計算時間の比較(2)

この図より、ほぼ $(R/h)=1.1$ を境界として式(16)と式(19)による計算時間は逆転する傾向にあり、 r が小さい条件下では、式(19)、すなわち積分型表示式に基づき G の計算を行うことで計算時間の大幅な短縮化が図られることなどがわかる。

動水圧計算に用いるGreen関数の計算に際しては、従来より明らかにされている級数型表示式に加えて、本研究で明らかにした積分型表示式を併用することで、より効率的な計算が可能となるものと言えよう。

4. 柱状構造物に作用する動水圧合力の特性

(1) 円柱構造物

一様水深の海域で水平振動する鉛直円柱まわりの動水圧分布およびその合力に関しては、Garrison and Berklite²⁾により解析解が示されている。動水圧の水平合力 F とその作用高 L に関する結果を図-3に示す。動水圧の合力は、式(23)に示すように円柱の体積を用いた無次元化により付加質量係数 F^* として表示され、図中には比較のため積分型および級数型Green関数を併用した本解析法による算定結果が併記してある。

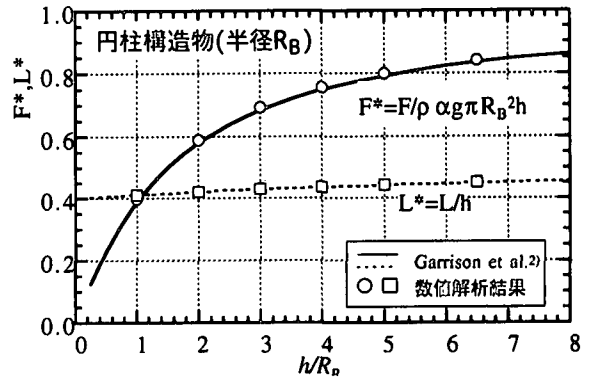


図-3 円柱に作用する水平合力

$$F^* = \frac{|F|}{\rho \alpha g \pi R_B^2 h} \quad (23)$$

ここに、 R_B :円柱の半径、 π :円周率である。

この図より円柱が水平振動する際の付加質量は相対水深 h/R_B が小さくなるにつれて一様に減少することや、水平力の作用位置の変動は比較的小さいことなどがわかる。そして本解析法による計算結果は解析解とよく一致しており、妥当性を確認することができる。

(2) 没水した角柱構造物

没水型の角柱構造物に作用する地震時動水圧やその合力に関しては、基本的な形状であるにもかかわらず、これまで系統的に検討された例は見当たらない。ここでは上記で明らかにした解析法の計算例として、水平振動する没水型角柱構造物について、没水深や断面寸法などを種々変化した場合の動水圧の水平合力 F とその作用高 L を示す。

角柱構造物は、水底からの高さが H 、断面の辺長が a, b で表される直方体で、長さ a の辺が x 軸方向に面しているものと仮定する。合力 F の表記にあたっては、式(24)で定義した無次元量 F^* を用いる。

$$F^* = \frac{|F|}{\rho \alpha g a^2 H} \quad (24)$$

図-4および5は、 $b/a=1.0$ の正方角柱を対象として、 F^* と $L^*(=L/H)$ の算定結果を相対水深 h/a との関係で示した図である。これらの図中においては、角柱の相対高さ H/h がパラメータとして採用してある。また、図-4は振動の方向角 θ が 0deg 、図-5は $\theta=45\text{deg}$ の場合について示すものである。

これらの図より角柱に作用する F^* は、相対水深 h/a が小さくなるにつれて一様に減少することや、 L^* の変動は比較的小さいことなど、図-3に示した円柱構造物の場合と同様の特性を示すことがわかる。

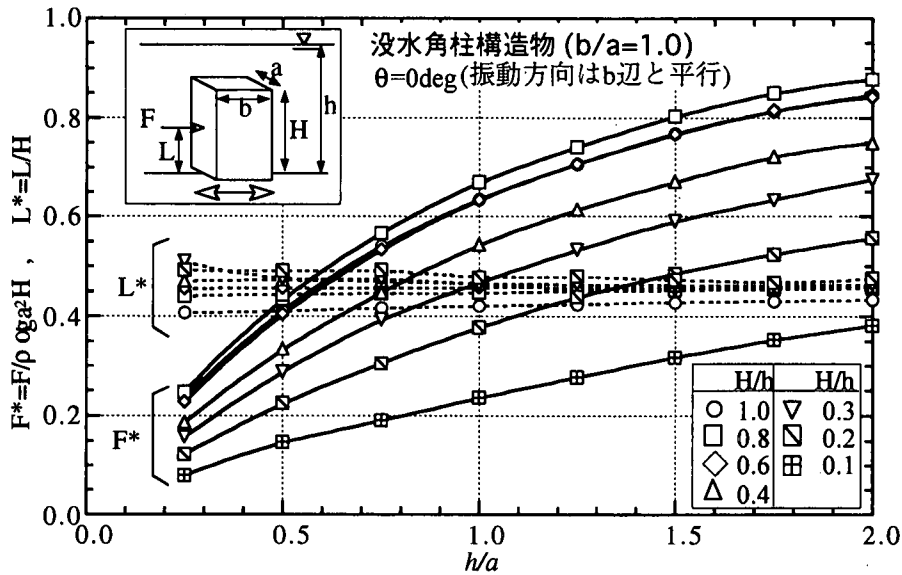


図-4 没水型の正方角柱に作用する水平合力 ($\theta=0\text{deg}$)

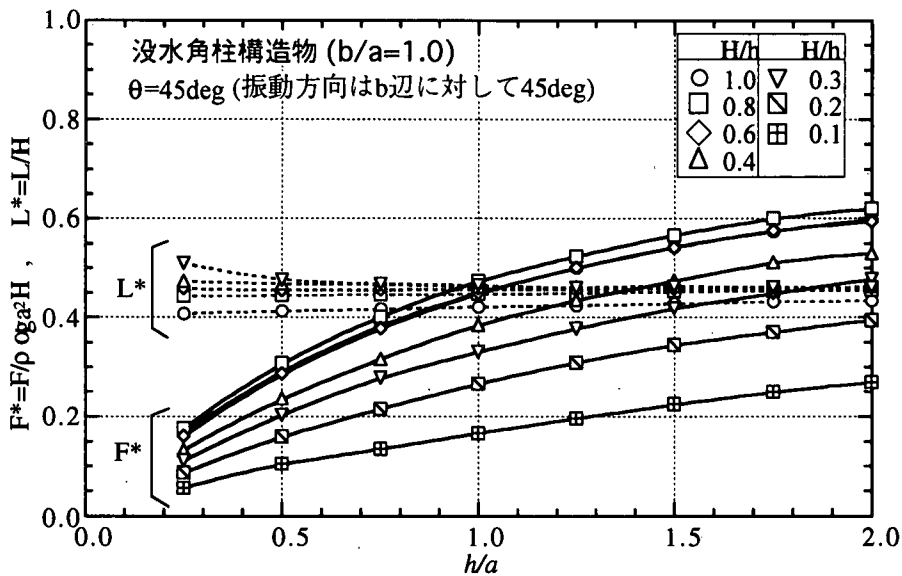


図-5 没水型の正方角柱に作用する水平合力 ($\theta=45\text{deg}$)

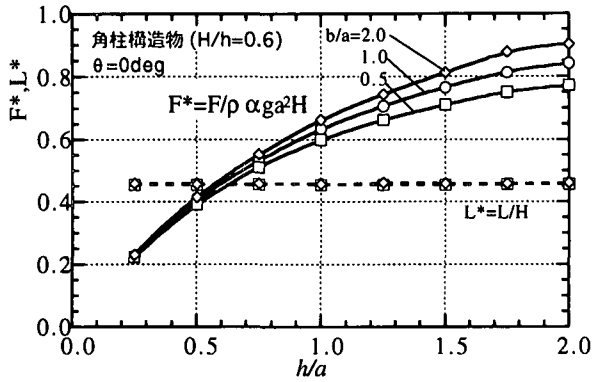
相対高さ H/h に着目してみると、 $H/h=0.6\sim 1.0$ の範囲では F^* の変動はほとんどなく、ほぼ h/a のみに依存しているものと言える。しかし、角柱の高さが低い場合 ($H/h=0.1\sim 0.4$) には F^* は H/h の変化に対しても大きく影響されるようになる。振動の方向角が 45deg の場合においては、 F^* の定性的な特性は変わらないものの、定量的にはほぼ $1/\sqrt{2}$ に減少していることなどがわかる。水平合力の無次元作用高 L/H については、有意な変動は見られず、ほぼすべての条件下で $L/H=0.4\sim 0.5$ の値を示している。

次に、図-6は、相対高さを ($H/h=0.6$) に固定して、角柱断面の辺長比 b/a を変化させた場合の結果を示すものである。この場合にも合力 F の無次元化には辺長 b に依存しない式(24)を採用しているが、 b/a の

変化に伴う F^* への影響は意外に少なく、特に相対水深 h/a の小さな条件下では、 b/a の影響はほとんど無視できるものと判断される。

5. まとめ

本研究では、動水圧解析に用いる3次元Green関数について、級数型および積分型の表示式の各々を明らかにすると共に、新たに誘導した積分型表示式の具体的な計算方法について示した。両表示式は収束特性の違いによる計算時間短縮化の面において、互いに補間する関係にあることが判明した。動水圧計算に用いるGreen関数の計算に際しては、級数型



図一 6 没水型の異形角柱に作用する水平合力
($\theta=0\text{deg}$)

表示式に加えて、積分型表示式を併用することで、より効率的な計算が可能となるものと結論される。

また、構造物の基本的な形状である没水型の矩形柱体を対象とした一連の計算を行い、動水圧の合力の強度と、それに及ぼす構造物各部の寸法の影響について明らかにした。

本論の内容が海洋構造物の設計実務において参考となれば幸いである。

参考文献

- 1) 中村孝明, 田中良弘, 元良勇太郎: 3次元任意形状海洋構造物の地震応答解析, 海岸工学論文集, 第39巻, pp.701-705, 1992.
- 2) Garrison, C. J. and Berklite, R. B.: Impulsive hydrodynamics of submerged rigid bodies, *Journal of Engng. Mechanics Div.*, ASCE, Vol.99, No. EM1, pp.99-120, 1973.
- 3) Morita, S. and Nakamura, T.: Hydrodynamic pressure on massive structure under partial reflective bottom condition during earthquakes, *Proceedings of the 16th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol.2, pp.275-282, 1997.
- 4) Seto, H.: Some expressions of pulsating source potentials in shallow water and their efficient algorithms, *Trans. of the West-Japan Soc. of Naval Arch.*, No.85, pp.25-36, 1991.
- 5) Hobson, E. W.: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge, 1931.